UNIVERSITATEA DE VEST DIN TIMIŞOARA
FACULTATEA DE LITERE, FILOSOFIE ŞI ISTORIE
CATEDRA DE FILOSOFIE

IANCU LUCICA

METALOGICA

Vol. I

1997

Prefață,

Cursul de față este destinat studenților de la Secția de Filosofie a Universității de Vest din Timișoara care au prevăzut în planul de învățământ un curs de metalogică cu durata de două semestre. Acest prim volum cuprinde probleme metalogice de interes general cu privire la disciplinele logice deja studiate - logică generală, logică simbolică, logică filosofică, istoria logicii. Un curs special de filosofia logicii vine să întregească pregătirea logică a studenților de la Facultatea de Filosofie. Volumul al doilea va cuprinde semiotica logică (sintaxa, semantica și pragmatica logică) precum și o serie de probleme speciale cu privire la paradoxele logico-matematice și soluțiile acestora. Este inutil să mai insist asupra importanței acestor probleme pentru filosofi ca și pentru alte categorii de intelectuali.

Timișoara,
14.03.1997

Iancu Lucica

INTRODUCERE

1. Aspecte generale

La fel ca orice altă ştiinţă, logica se compune dintr-un ansamblu de discipline, fiecare disciplină fiind alcătuită la rândul ei din teorii. În raport cu teoriile vorbim uneori de sisteme. Disciplinele, teoriile şi sistemele logicii, poartă, de cele mai multe ori, denumirea de "logică", de aici pericolul anumitor confuzii.

În cartea sa *Topics in Philosophical logic,* N. Rescher face schiţa principalelor discipline şi teorii logice *(a map of logic).* La noi, Gh. Enescu şi P. Botezatu vor reconstitui tabloul general al ştiinţei logicii, conform noilor orientări care s-au conturat între timp. Ceea ce se degajă din toate aceste sistematizări este grija pentru delimitarea logicii de alte discipline şi teorii cu care se înrudeşte îndeaproape. Unii preferă să vorbească de "logica pură" tocmai pentru a accentua aceste delimitări. Indiferent de terminologia folosită, următoarele discipline pot fi considerate de bază: 1) logica generală; 2) logica simbolică (clasică şi neclasică); 3) teoria sistemelor logice (metalogica); 4) istoria logicii. Urmează apoi aplicaţiile logicii în principalele ştiinţe particulare - matematica, fizica, biologia, lingvistica, psihologia, ştiinţele sociale. O amploare deosebită cunosc în ultima vreme aplicaţiile logicii în filosofie - logica filosofică.

În ce priveşte matematica, aplicaţiile logicii sunt reunite aici sub numele generic de "logică matematică". Se constată astăzi o anume libertate, aş spune chiar neglijenţă, în utilizarea acestui termen. Unii echivalează logica matematică cu logica simbolică pe care o definesc drept "logica formală tratată cu mijloacele matematice" (S.C. Kleene). Alţii, dimpotrivă, văd în logica matematică o disciplină a matematicii în care includ şi fundamentele matematicii (R. L. Goodstein, Wang Hao ş.a.). În ce constă atunci caracterul matematic al noii logici? Este ea matematică pentru că foloseşte metode şi concepte

de origine matematică? Sau este matematică pentru că se aplică cu deosebit succes în studierea problemelor matematicii? Iată întrebări la care nu se mai poate răspunde simplu. Părerea mea este că definițiile nu trebuie luate "pe garanție", cum se spune, că trebuie să confruntăm de fiecare dată intensiunea termenului "logică matematică" (dată prin definiție), cu extensiunea lui - teoriile avute în vedere. Vom constata că aceste teorii nu satisfac în egală măsură cerințele impuse prin definiție. La A. Church, ca să iau un exemplu la întâmplare, "logica matematică (aceeași cu "logica simbolică" și "logistica") este logica formală studiată cu ajutorul limbajelor formalizate" (13, 56). El include însă aici mult mai mult decât lasă să se întrevadă prin definiție, și anume calculul propozițional, calculul funcțional de diferite ordine, aritmetica recursivă, axiomatica teoriei mulțimelor și instituționalismul matematic. Dacă din punct de vedere al intensiunii (definiției) raportul dintre logica tradițională și logica matematică aproape că nu ridică probleme, din punct de vedere al extensiunii diferența dintre ele este esențială. A. Church nu pare foarte preocupat de cerința adecvării în definiție între intensiunea și extensiunea termenului.

Faptul că unele dintre disciplinele și teoriile logicii formale nu sunt relevante pentru matematică i-a făcut pe mulți logicieni contemporani (în special cei de formație matematică) să le privească cu rezerve și chiar să le respingă, considerându-le mai curând "produsul fanteziei filosofice decât rezultatul unei necesități matematice profunde" (A. Grzegorcyk).

Prima observație: Logica modernă s-a dezvoltat plecând de la nevoile matematicii, însă aplicațiile ei actuale depășesc cu mult granițele matematicii. Aceste aplicații se reîntorc asupra logicii îmbogățind-o cu noi fapte particulare și în felul acesta cu noi posibilități de generalizare. Nu este sigur că dezvoltările nematematice ale logicii actuale nu-și vor găsi cândva o utilizare matematică. Istoria recentă a logicii demonstrează că discipline și teorii care în mod tradițional nu au avut nici o legătură între ele au putut fi preluate în noul context al dezvoltării logicii unde au primit o abordare unitară. Iată de ce distincția dintre dezvoltările logicii și aplicațiile ei în diferite domenii nu trebuie văzute rigid și mai ales nu trebuie opuse unele în raport cu celelalte. Să nu

uităm că logica a intrat într-o nouă fază de dezvoltare, că ea tinde să-şi redobândească eficienţa în calitate de "organon", de "îndreptar al gândirii" în toate domeniile şi nu doar în matematică aşa cum s-a crezut multă vreme şi se mai crede uneori şi astăzi.

2. Sistemul disciplinelor şi al teoriilor logice

Pornind de la sistematizările lui N. Rescher şi I.M.Bochenski precum şi de la contribuţiile unor autori români deja invocaţi, voi prezenta în continuare structura teoretică a principalelor discipline logice aşa cum se prezintă ele în momentul de faţă.

I. Logica generală

1. Teoria despre principii şi legi logice
2. Teoria noţiunilor şi a termenilor
3. Teoria definiţiei
4. Teoria judecăţii şi propoziţiei
5. Teoria inferenţelor imediate
6. Teoria raţionamentului deductiv (silogistic şi nesilogistic)
7. Teoria inducţiei
8. Teoria demonstraţiei
9. Teoria sofismelor şi a erorilor logice

II. Logica simbolică (clasică)

1. Logica (teoria) propoziţiilor
2. Logica predicatelor
3. Logica relaţiilor
4. logica claselor

III. Logica simbolică (modernă)

1. Logica modală
2. logica polivalentă
3. Logica intuiţionistă
4. logica implicaţiilor nonstandard
5. Logica cuantificării nonstandard
6. Logica combinatorică

IV. Dezvoltări ale logicii simbolice

1. Logica impreciziei (fuzzy)
2. Logica topologică
3. Logica interogativă
4. Logica temporală
5. Logica relației parte/întreg

V. Metalogica

1. Teorii şi sisteme logice
2. Categoriile logicii formale moderne
3. Problema metodei în logica formală
4. Paradoxele logico-matematice
5. Semiotica logică (sintaxa, semantica şi pragmatica logică)
6. Probleme speciale

VI. Istoria logicii

1. Istoria logicii antice
2. Istoria logicii medievale
3. Istoria logicii în Renaştere şi epoca modernă
4. Istoria logicii simbolice

VII. Aplicațiile logicii

1. Aplicații în matematică (logica matematică)
2. Aplicații în ştiințele empirice (logica ştiinței)
3. Aplicații în filosofie (logica filosofică)
4. Aplicații în drept (logica juridică)
5. Alte aplicații

Precizez că nu am făcut o clasificare a teoriilor logice după toate regulile ci doar o grupare a lor pe diferite criterii. De altfel, aceste clasificări nu seamănă de la autor la autor şi inevitabil trebuie recurs la anumite simplificări. Probleme speciale ridică totuşi logica generală care în ultima vreme nu mai circulă sub această denumire. Mai ales în literatura de limbă engleză în loc de "logică generală" se foloseşte "Introducere în logică". Adeseori aceste "Introduceri"

cuprind şi diferite părţi ale logicii simbolice, ceea ce înseamnă că şi aici lucrurile sunt pe cale de a se schimba. Iată şi câteva exemple de asemenea "introduceri" care pot fi asimilate mai mult sau mai puţin ideii de logică generală.

1) I.M. Copi, *Introduction to Logic*, New York, London, 1972.
2) M.R. Cohen, E. Nagel, *An Introduction to Logic and Scientific Method*, London, 1972.
3) P. Hurley, *A Concise Introduction to Logic*, Belmont, California, 1994.
4) P. Botezatu, *Introducere în logică*, vol. 1, 2, Iaşi, 1995.

3. Teorie şi metateorie

Unitatea de bază în organizarea şi structurarea unei ştiinţe este teoria. Într-un sens foarte larg, teoria este o mulţime de propoziţii despre un anumit sistem de obiecte, mulţime dotată cu o organizare ce permite fixarea, prelucrarea şi, în final, creşterea (sporirea) cunoştinţelor despre aceste obiecte. Prin "obiect" înţeleg aici ceva foarte general şi anume tot ceea ce poate fi studiat dintr-un anumit punct de vedere. Organizarea teoriilor cuprinde toate operaţiile şi relaţiile logice de bază - inferenţa, definiţia, clasificarea, diviziunea ş.a. Se înţelege că nu toate teoriile au aceeaşi organizare logică, că unele sunt mai "tari" altele mai "slabe", situaţie în care este mai potrivit termenul *infrateorie*.

Am definit teoria în raport cu un anumit "sistem de obiecte". Acest sistem poate fi specificat sau nu. Nimic nu ne împiedică să considerăm obiectul unei teorii T_i drept o altă teorie, să zicem T_K. În acest caz T_K este teoria obiect iar T_i metateoria. Aşadar, relaţia de la metateorie la teorie este relaţia "despre" (T_i despre T_K). Această relaţie este destul de specială dacă ţinem seama de proprietăţile ei formale. Ea este:

1) Ireflexivă (nu are loc "T_i despre T_i")
2) Asimetrică (dacă T_i este despre T_K atunci T_K nu poate fi despre T_i)
3) Intransitivă (dacă T_i este despre T_K şi T_K despre T_n, nu rezultă că T_i este despre T_n)

Fiind inflexivă, asimetrică şi intranzitivă, relaţia "despre" nu poate fi asimilată din punct de vedere formal cu niciunul din tipurile

de relații pe care le studiază logica (ea nu este nici relație de ordine, nici de echivalență și nici alt tip de relație).

La rândul ei metateoria poate deveni obiect pentru o altă teorie care se va numi *metateorie* și lucrurile pot continua încă. Pentru a evita repetarea prefixului "meta", voi folosi expresia "meta-n-teorie", unde n este un număr natural ce indică ordinul metateoriei:

n = 0 corespunde teoriei obiect (sau teoriei pur și simplu)
n = 1 corespunde metateoriei
n = 2 corespunde metametateoriei etc

Până unde poate merge ierarhizarea metateoreticii a teoriilor? Principial vorbind, această ierarhizare este deschisă, orice teorie își asociază în mod potențial o metateorie. Efectiv, însă, lucrurile nu stau așa și ierarhia metateoretică se oprește de regulă foarte repede. Să mai adaugăm apoi că cu cât ordinul metateoriei este mai mare, cu atât organizarea ei este mai slabă.

Distincția teorie-metateorie este simetrică distincției limbaj-metalimbaj. Prin "metalimbaj" înțelegem atunci limbajul unei metateorii. Dacă L este limbajul teoriei obiect, ML este metalimbajul, astfel că are loc relația "ML este despre L". Termenii "teorie" și "limbaj" aparțin metateoriei, prin intermediul lor vorbim despre teorie, respectiv limbajul teoriei. În schimb "metateorie" și "metalimbaj" aparțin metametalimbajului.

De regulă rolul de metalimbaj îl joacă limbajul natural la care se adaugă anumite fragmente de limbaj simbolic. Spre deosebire de limbajul simbolic și limbajul formalizat, limbajul natural este universal, el permite construirea de propoziții care să vorbească chiar despre limbaj. Unele dintre ele sunt reflexive (sau autologice) în sensul că vorbesc chiar despre ele. Evident, avem aici o încălcare a distincției limbaj-metalimbaj, care uneori poate duce la complicații în genul paradoxelor sau antinomiilor logice. După cum arată exemplele de mai jos, nu toate aceste autoraportări au același statut logic:

1. Această propoziție este falsă (= propoziție paradoxală);
2. Această propoziție este fără sens (= propoziție falsă);
3. Această propoziție are cinci cuvinte (= propoziție adevărată).

În toate aceste propoziții este încălcată distincția limbaj-metalimbă însă numai prima este paradoxală, ceea ce înseamnă că distincț despre care vorbim nu este presupusă peste tot și întotdeauna la fel.

Fie T_1, T_2, ..., teoriile unei științe la un moment dat. Metateor poate fi luată atunci într-un sens general când se referă la toate aces teorii, sau într-un sens restrâns când se referă doar la unele teorii sa chiar la una singură. Metateoria în raport cu teoriile logice se va num "teoria sistemelor logice" sau "metalogica". În acest curs am în vede metalogica în sens larg și nu în sens restrâns.

Care sunt principalele categorii de probleme la care răspund metalogica? Pentru a putea identifica aceste probleme, voi face î continuare o succintă descriere a teoriilor logice așa cum se prezint ele în momentul de față.

Relativ la oricare dintre teoriile logice distingem:
a) un anumit simbolism (în sensul de limbaj simbolic);
b) un sistem de concepte;
c) anumite procedee;
d) o anume formă de organizare.
Corespunzător vor exista patru mari categorii de probleme:
a') probleme relative la limbaj;
b') probleme relative la sistemul de concepte;
c') probleme privind procedeele (metodele) folosite;
d') probleme legate de organizare.

În această primă parte a cursului voi discuta cu prioritate acest gen de probleme care țin de teoria generală a sistemelor logice. Partea a doua este destinată unor probleme mai speciale legate în principal de ideea de paradox și de soluțiile oferite în problema paradoxurilor.

Câteva precizări în legătură cu categoriile și metodele logicii, în speță a logicii simbolice.

Dintre conceptele logicii, unele sunt specifice, altele sunt generale în sensul că ele pot fi întâlnite și în alte științe (în matematică mai ales). Cele mai generale concepte dintr-o știință sunt categoriile acelei științe. Dat fiind că logica modernă a debutat sub semnul nevoilor de fundamentare logică a matematicii, am insistat în special asupra acelor categorii care sunt de proveniență matematică dar care cu timpul s-au dovedit a fi centrale în logică. Este vorba de categoria

de clasă (mulțime), funcție, număr și structură. Voi încerca să arăt în cuprinsul acestei lucrări ce este logic și ce este matematic în aplicarea și funcționarea acestor categorii.

O distincție similară se poate face și în legătură cu conceptul de metodă în logică. Voi distinge și aici între un sens restrâns și un sens larg. În sens restrâns metoda este un sistem de reguli ce prescriu modul de realizare al unor operații în vederea rezolvării unei probleme (sau clasă de probleme). În sens restrâns, deci, metoda se definește relativ la problemă. În sens larg ea se definește relativ la teorie. Dacă o teorie T_i oferă aplicații într-o teorie T_K în raport cu toate nivelele teoriei pe care le-am invocat mai sus, atunci vorbim despre "metoda T_i în T_K" (de ex. "metoda aritmetizării în logică", "metoda teoriei mulțimilor" ș.a.). Nu este obligatoriu ca T_i să aparțină matematicii și T_K logicii, s-ar putea foarte bine întâmpla ca ambele teorii să fie teorii logice. Prima situație caracterizează începuturile logicii moderne față de a doua, care este specifică dezvoltării ei actuale.

Se pune în mod firesc întrebarea ce anume determină construirea metateoriei în raport cu un sistem de teorii date? Fără a intra în detalii voi spune totuși că nivelul metateoretic nu se construiește decât în măsura în care acest lucru este cerut, dacă problemele pe care le ridică teoriile reclamă un asemenea nivel. Exemplare din acest punct de vedere sunt logica și matematica deși în ultima vreme această tendință se observă și în cazul altor discipline (fizica, biologia, economia și chiar filosofia). Dintre lucrările cu caracter metateoretic care s-au impus în acest secol, și pe care le-am utilizat în cursul de față, voi menționa:

1) A. Tarski, *Logic, Semantics, Metamathematics,* Oxford, 1956.
2) S.C. Kleene, *Introduction to Metamathematics,* Amsterdam, London, 1971.
3) H. Rasiowa, R. Sikorski, *The Mathematics of Metamathematics,* Waszawa, 1963.

La acestea se adaugă cartea lui gh. Enescu, *Teoria sistemelor logice,* Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1976., prima expunere sistematică a metalogicii în limba română și singura până acum.

CAP. I

LOGICA ŞI LIMBAJELE SIMBOLICE

1. CONSTITUIREA SIMBOLISMULUI LOGIC

Spre deosebire de matematică, logica a evoluat mult timp fără un sistem propriu de notaţii care să se constituie, prin acumulări succesive, în ceea ce numim astăzi un *limbaj simbolic*. Există, desigur, unele excepţii mai ales în silogistică, dar acestea sunt încă departe de ceea ce se cheamă în mod obisnuit a fi un limbaj.

Nu aş putea spune că există un acord în ceea ce priveşte modul de înţelegere a naturii simbolurilor în logica tradiţională. Lukasiewicz era de părere că acestea apar încă la Aristotel şi că ele se apropie, prin modul de utilizare, de conceptul matematic de variabilă: „Introducerea variabilelor în logică - notează Lukasiewicz - este una dintre cele mai mari inovaţii ale lui Aristotel. Este de-a dreptul incredibil că până acum, cel puţin din câte ştiu eu, nici un filosof sau filolog nu a atras atenţia asupra acestui important fapt. Îndrăznesc să spun că ei au fost slabi matematicieni pentru că orice matematician ştie că introducerea variabilelor în aritmetică a început o nouă epocă în această ştiinţă" (48; 3).

Adevărul este că atât în *Analitica Primă* cât şi în *Analitica Secundă*, Aristotel foloseşte un gen de variabilă pentru termeni, însă el nu distinge suficient de clar între statutul de constantă şi cel de variabilă al unui simbol. Nici Aristotel şi nici urmaşii lui nu au aprofundat aceste probleme motiv pentru care limbajul logicii a rămas pentru mai bine de două mii de ani limbajul natural, iar utilizarea simbolurilor a fost sporadică şi limitată la o categorie destul de restrânsă de probleme. Uneori însă, abordarea prin limbajul natural a atins un nivel destul de ridicat de precizie. Să nu uităm că tot Aristotel este cel care a dat silogisticii o asemenea organizare încât a stârnit entuziasmul lui Kant făcându-l să afirme că de la Aristotel logica nu a făcut nici un pas înainte şi nici unul înapoi. Ea a ieşit perfectă din

capul lui Aristotel, au adăugat apoi contemporanii, aşa cum Pallas Athena a ieşit cu suliţă şi scut din capul lui Zeus. La rândul lor, medievalii ajunseseră la un asemenea rafinament încât, în anumite probleme, cu greu ar putea fi întrecuţi astăzi. Pentru un conservator care ar vrea să spună că nimic nu este nou sub „soarele logicii", toate aceste rezultate ar putea constitui puternice puncte de sprijin. Dar dacă lucrurile stau într-adevăr astfel, se ridică în mod firesc câteva întrebări:
1) Ce anume a făcut necesară introducerea limbajelor simbolice în logică?
2) În ce măsură simbolismul este indispensabil problemelor logicii?
3) Este simbolismul propriu logicii sau el este un „împrumut" din matematică?

Nu se poate răspunde în mod satisfăcător acestor probleme fără să se facă o analiză atentă situaţiilor concrete care au impus logicii noul tip de limbaj. Ceea ce putem spune deocamdată este că resorturile care au împins logica pe acest drum au fost acumulările la nivelul conţinutului. Câtă vreme conţinutul logicii se rezuma la ceea ce ne relevă logica tradiţională, inovaţiile la nivelul limbajului nu s-au bucurat de un succes prea mare. Exemplul cel mai semnificativ din acest punct de vedere ni-l oferă Leibniz, primul autor până în sec. XIX preocupat pentru construirea unui simbolism adecvat nevoilor logicii. Ideile şi intuiţiile lui stârnesc şi acum admiraţia cercetătorilor putând prefaţa într-un mod onorabil multe din temele logicii moderne de astăzi. Voi reveni pe larg asupra problemelor ridicate de Leibniz, deocamdată vreau să fac câteva aprecieri generale cu privire la originea principalelor sale contribuţii în domeniul logicii şi la influenţele pe care le-a resimţit din partea lui Descartes şi Lullus.

Deşi merge pe o cu totul altă cale, Leibniz este inspirat de Descartes în ceea ce priveşre ideile de „characteristica universalis" şi de „mathesis universalis". Se ştie că Descartes nu încearcă să reformeze logica, pe care într-o anumită măsură o subestimează, ci metoda. În acest sens el merge pe două planuri. Pe de-o parte caută să surprindă însuşirile gândirii matematice (pornind de la calculul şi demonstraţiile geometrice), iar pe de altă parte încearcă să generalizeze simbolismul utilizat în algebră. Descartes are în vedere atât creaţia matematică pe care o vede avansând din intuiţie în intuiţie

cât şi exprimarea simbolică, exactă. Din analiza gândirii el scoate regulile metodei care la nivel foarte general au un caracter euristic, însă, pe măsură ce se apropie de probleme concrete ele devin din ce în ce mai exacte.

Punând accent pe intuiţie Descartes neglijează logica dar îl va stimula pe Leibniz în cercetarea formelor logice şi în corelarea lor cu conceptele matematice şi cu limbajul folosit în matematică. Se poate spune că Descartes este mai aproape de intuiţionismul logico-matematic pentru care cadrul strict logic este ceva secundar. Leibniz, dimpotrivă, este mai aproape de formalism şi logicism. Simbolismul său este alimentat de trei mari surse: *a)* logica aristotelică (mai bine spus logica tradiţională), *b)* analogiile dintre operaţiile respectiv relaţiile aritmetice şi cele logice, şi *c)* propriile sale intuiţii asupra demersului logic. Merită să-l invocăm aici şi pe R. Lullus (1235 - 1315) care îl inspiră pe Leibniz în ceea ce priveşte ideea de *alfabet*. În prima parte a lucrării sale *Ars magna et ultima* numită *Alfabetum*, Lullus studiază „principiile" sau „termenii principali". Combinatorica acestor principii sau termeni este o altă idee majoră pe care Leibniz i-o datorează lui Lullus.

Limitarea la logica aristotelică, în primul rând la teoria silogismului categoric, s-a dovedit a fi o frână pentru Leibniz. Analogiile logico-aritmetice l-au îndepărtat de crearea unui simbolism specific logicii deşi l-au ajutat să ducă destul de departe ideile de *calcul*, *demonstraţie formalizată* şi chiar de *model*. Faptul că structurile logice axate pe propoziţii şi relaţii între propoziţii s-au dovedit asemenea structurilor matematice, în speţă aritmetice, l-au apropiat pe Leibniz de un anume formalism. Specificul logicii stă în natura entităţiilor sale, structurile pure fiind un loc comun în relaţiile dintre cele două ştiinţe. Dacă modelul structurii este logica atunci şi limbajul logicii trebuie să fie altceva decât limbajul matematicii. Or pentru Leibniz limbajul logic este în mare măsură tributar limbajului matematic de aceea Leibniz nu a putut să rezolve până la capăt problema simbolismului logic.

După Leibniz, eforturile în direcţia introducerii simbolismului au fost continuate de Lambert, Holland, Castillon, ş.a. care au mers pe aceeaşi linie, a analogiilor dintre operaţiile logice şi cele aritmetice.

Succesele lor nu sunt notabile aşa că următorul moment important în dezvoltarea simbolismului logic îl constituie G. Bolle şi A. de Morgan. Ei vor muta centrul de greutate al discuţiilor de la analogiile de ordin aritmetic la cele de ordin algebric.

În *The mathematical analysis of logic* (1847) Boole pune problema construirii unui calcul prin care să poată obţine propoziţii adevărate plecând de la alte propoziţii prin eliminarea anumitor termeni. În acest scop el consideră propoziţiile logice ca identităţi între clase, un fel de ecuaţii cum am spune astăzi. Simbolismul pe care îl utilizează este adecvat în primul rând reprezenrării claselor şi relaţiilor dintre clase. Astfel „1" şi „0" reprezintă clasa univers respectiv clasa vidă iar x, y, z, ... sunt „simboluri elective" care selecţionează din universul de discurs elemente de un anumit tip. Un rol aparte revine simbolului „v" care apare de cele mai multe ori pentru a sugera caracterul nevid al unei clase. El are un statut logic apropiat mai mult de constantă decât de variabilă. Intersecţia claselor, notată cu „xy", este un semn compus care selecţionează din universul de discurs clasa acelor lucruri care sunt atât x cât şi y. Dacă valoarea unuia din simboluri este 1 sau 0 se obţin cazurile particulare 1x = x şi 0x =0 valabile şi pentru algebra numerică. Expresia „x-y" care corespunde scăderii din aritmetică, selecţionează lucrurile care sunt x fără a fi y. Condiţia ca această operaţie să aibă sens este ca cele două clase să fie disjuncte. În sfârşit, $\bar{x}$ selecţionează numai lucrurile care nu sunt x. El se defineşte prin: $\bar{x}$ = 1-x. Iată câteva exemple de expresii care sunt valabile atât pentru algebra numerică cât şi pentru algebra claselor:

1) xy = yx
2) x + y = y + x
3) x(y + z) = xy + xz

În schimb expresiile:

4) $x^2 = x$ (unde $x^2 = xx$)
5) x(1 – x) = 0

sunt limitative în raport cu algebra numerică. Expresia 5) corespunde principiului logic al noncontradicţiei şi se obţine din 4) prin regulile obişnuite de calcul. Dacă înlocuim pe „1-x" cu „ $\bar{x}$ " obţinem o formă mai actuală a acestui principiu: $x\,\bar{x} = 0$

În *The mathematical analysis of logic* ca şi în celelalte lucrări ale sale Boole, studiază câteva posibilităţi de interpretare a calculului său în diferite domenii de semnificaţii - durate, probabilităţi, propoziţii. După cum demonstrează W. şi M. Kneale (42), interpretarea prin propoziţii adaugă calculului un principiu nou şi anume principiul bivalenţei: x = 1 sau x = 0. Acest principiu care este de fapt un principiu logic nu este presupus de niciuna din celelalte interpretări.

Principalele categorii de semne din limbajul utilizat de G. Boole pot fi grupate după cum urmează:

1) semne pentru propoziţii şi lucruri: x, y, z... .

2) semne pentru operaţiile intelectului: –, ×, +,... .

3) semnul pentru identitate: „ = ".

4) semne cu semnificaţie constantă: 1, 0, v.

La aceste semne se mai adaugă o serie de alte semne care nu au o interpretare directă (semnele pentru funcţii de exemplu) ci doar ajută la prelucrarea matematică a semnelor interpretate.

Se observă că simbolismul lui Boole aparţine matematicii numerice sau, dacă acceptăm ideea larg răspândită astăzi cu privire la raportul dintre număr şi cantitate, acest simbolism aparţine matematicii cantitativiste. Aceasta nu înseamnă că aspectele calitative de care se ocupă logica se transformă automat în aspecte cantitative prelucrabile matematic. Marea inovaţie a lui Boole constă în ideea interpretării logice a simbolurilor şi în prelucrarea lor matematică pentru ca rezultatul acestor „prelucrări" să fie apoi reinterpretat logic. Următorul pasaj din cartea lui Boole *An investigation of the laws of thought* exprimă câi se poate de clar această concepţie asupra calculului matematic în logică: „condiţiile raţionamentului valid, realizat cu ajutorul simbolurilor, sunt:

1) Simbolurile utilizate în expresii au o interpretare, iar legile de combinare a lor sunt corect determinate din această interpretare.

2) Procesul formal de rezolvare sau demonstrare este efectuat conform legilor determinate mai sus fără a se ţine seama de interpretare.

3) Rezultatul final urmează a fi interpretat conform sistemului de interpretare dat la început" (6; 68).

După cum se poate observa chiar şi din acest scurt pasaj, Boole nu realizează o distincţie suficient de clară între „a demonstra" şi „a rezolva". Mi se pare corectă observaţia autorilor J. Corcoran şi S. Wood (15) că la Boole nu există un criteriu clar al validităţii unei inferenţe. Calculul ecuaţional, adică metoda de a determina soluţii, se confundă aici cu procedeul demonstrativ adică metoda de a determina consecinţe. Acest neajuns, esenţial pentru logică, rezultă din modul în care Boole înţelege calculul matemetic în rezolvarea problemelor logice.

Concomitent aproape cu Boole, Augustus de Morgan construieşte un calcul pentru silogistică în care cuantifică predicatele şi introduce pe lângă termenii pozitivi şi termeni negativi. Simbolismul său constă din următoarele categorii mai importante de semne:

1) Semne pentru termeni pozitivi: X, Y, Z,... .
2) Semne pentru termenii negativi corespunzători: x, y, z,... .
3) Semne pentru propoziţiile categorice cu termeni pozitivi (A_1, E_1, I_1 ,O_1) şi cu termeni negativi (A', E', I' ,O').
4) Semne pentru cuantorii universal şi particular: „)" şi „("
5) Semne pentru calitatea propoziţiei: „." (afirmativ) şi „ " (negativ).

Iată şi câteva exemple de transcriere a propoziţiilor de predicaţie în simbolismul de Morgan:

„X)) Y" (orice X este Y),
„X (.(Y" (unii X sunt Y),
„X).(Y" (nici un X nu este Y)
„X (.(Y" (unii X nu sunt Y).

Simbolismul lui de Morgan este greoi şi ridică o serie de dificultăţi de aceea el nu a rezistat. Totuşi ideea extinderii silogisticii prin introducerea de termeni negativi şi cuantificare nu a scăpat logicienilor de mai târziu. De asemenea, cunoscutele relaţii „de Morgan" au fost treptat generalizate şi se regăsesc astăzi în aproape toate teoriile de bază ale logicii. Merite deosebite îi revin lui de Morgan şi în ceea ce priveşte logica relaţiilor,un domeniu logic mai puţin studiat până la acea dată.

Cercetările care au urmat lui de Morgan şi Boole legate în principal de numele lui Jevons, Grassman, Venn, Mc Coll, Poreţki,

ş.a. formează la un loc ceea ce numim astăzi „etapa algebrei logice". Ele contribuie din diferite puncte de vedere la precizarea conceptului de *algebră booleană*. Iată câteva din achiziţiile mai importante ale acestei etape în ceea ce priveşte constituirea simbolismului logic:

1) W. S. Jevons clarifică unele din problemele rămase neelucidate la Boole şi introduce chiar elemente noi atât în privinţa concepţiei de ansamblu cât şi a simbolismului. Semnul „+", de exemplu, va corespunde la St.Jevons disjuncţiei neexclusive. În felul în care este definită, această operaţie impune o nouă lege logică: x + x = x. Împreună cu x x = x, introdusă deja de Boole, această lege va contribui hotărâtor la eliminarea coeficienţilor numerici din simbolismul logic. Trebuie spus că cele două legi sunt caracteristice pentru algebra binară, o ramură foarte importantă a algebrei moderne, cu multiple aplicaţii în tehnica de calcul.

2) J.D.Gergone şi E.Schröder introduc semne „⊂" pentru relaţia de incluziune dintre clase. Uneori acest semn este folosit şi pentru a reda diferite relaţii din logica tradiţională (relaţiile de subordonare dintre termeni sau de subalternare între propoziţii).

3) Hugh McColl foloseşte constantele „1" şi „0" pentru a marca valoarea logică a unei propoziţii. A = 1 şi A = 0 înseamnă „propoziţia A este adevărată" (respectiv falsă). Semnul identităţii „=" este folosit de McColl pentru a simboliza echivalenţa propoziţiilor, iar A' înseamnă negarea propoziţiei A. Relaţiile dintre propoziţiile A şi A'sunt redate prin expresiile A A' = 0 şi A + A' = 1. La rândul ei implicaţia este notată cu „A : B" şi se citeşte „A implică B" sau „dacă A este adevărat B este întotdeauna adevărat". În baza acestor simboluri Mc Coll construieşte un calcul algebric pentru logică similar în multe privinţe celui construit de G.Boole.

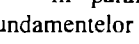
4) P.S.Poreţki încheie etapa algebrei logicii şi dă o nouă dezvoltare concepţiei lui G. Boole. Simbolismul lui nu diferă în mod esenţial de cel al lui H.Mc Coll. După unii istorici ai logicii etapa algebrei logicii s-ar încheia de fapt cu A.N.Whitehead care în *A treatise of absrtact algebra* dezvoltă pe larg algebra propoziţiilor considerată de el o nouă ramură a algebrei moderne.

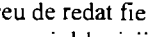
Pe măsură ce simbolurile s-au înceţăţenit în logică au început să apară şi primele studii asupra simbolismului. Îl voi menţiona în

primul rând pe Ch.S.Peirce de numele căruia se leagă, între multe altele, apariția semioticii logice. Tot Peirce este cel care va introduce simbolurile „Π", „Σ" pentru cei doi cuantori, universal și particular. Semnul „Π" (de la produs) și „Σ" (de la sumă) sunt puse în legătură cu produsul și suma din logica propozițiilor. Aceste simboluri au fost preluate de Lukasiewicz și pot fi întâlnite și astăzi în logică.

În paralel cu etapa algebrei logicii se derulează etapa „fundamentelor matematicii" avându-l ca prim protagonist pe Frege. E greu de redat fie și în linii mari ideile înnoitoare pe care el le-a adus în domeniul logicii și al matematicii. Reținem deocamdată că Frege este primul autor care a creat un simbolism special pentru logică. Diferența dintre simbolismul lui Frege și simbolismul lui Boole se explică prin diferența de concepție pe care cei doi autori au avut-o asupra raportului dintre logică și matematică. Despre această problemă am vorbit însă în *Introducere*.

Iată pe scurt câteva dintre semnele de bază utilizate de Frege în logică:





Aceste semne se compun în diferite modalități pentru a putea exprima raporturile dintre expresii. Regulile lor de compunere sunt formulate în mod explicit de către Frege însă ele nu constitue o definiție inductivă pentru noțiunea de „expresie în L".

Deși valabil în principiu, simbolismul lui Frege este extrem de greoi și de neeconomicos de aceea el nu a reușit să se impună. Aplicat în matematică acest simbolism duce la formule complicate care fac calculul aproape imposibil.

Pasul decisiv în ceea ce privește constituirea simbolismului logic l-a făcut G.Peano. Întemeietorul aritmeticii axiomatizate a creat un simbolism foarte simplu și totodată foarte eficient. Redau în

continuare câteva din categoriile mai importante de semne folosite de Peano:

1) semne pentru variabile propoziționale: *a*, *b*,...; x, y,...; p, q,...;

2) semne pentru adevăr și fals: $\vee$, $\wedge$;

3) semne pentru operații: $\cap$, $\cup$, – (și, sau, non);

4) semne pentru relații: $\supset$, =, ε;

5) semne pentru exprimarea generalității $a \supset_{x, y} b$ (pentru orice x,y... *b* este implicat de *a*).

Simbolismul lui Peano a fost adoptat cu unele modificări de către Russel și Witehead în *Principia Mathematica* (1910-1913), prima lucrare de anvergură în care logica modernă apare în linii mari constituită. Chiar și după apariția P. M. s-au mai înregistrat unele achiziții în domeniul simbolismului însă acestea nu sunt indispensabile în principiu. O surpriză va mai produce totuși scrierea fără paranteze a lui J. Lukasiewicz. El folosește simboluri literare pentru operatorii propoziționali pe care le plasează în fața variabilelor (Np, Kpq, Apq, Cpq, etc.). Scrierea lui Lukasiewicz, foarte simplă și elegantă s-a dovedit a fi cea mai adecvată expunerilor axiomatice din logica propozițiilor și silogistică. Ea este proprie logicii și marchează cea mai radicală deosebire față de scrierea matematică.

Ne dăm seama, așadar, că simbolismul nu este ceva specific matematicii cum s-a crezut multă vreme și că el poate să apară și în alte științe. În ceea ce privește logica recursul la simboluri este determinat de nevoia de precizie în rezolvarea anumitor probleme dintre care cele mai multe nu apar în logica tradițională. Achizițiile la nivelul limbajului trebuie văzute, de aceea, în dependență de achizițiile la nivelul problemelor (conținutului). Numai când logica s-a văzut pusă în fața rezolvării de noi probleme s-a putut vorbi de nevoia exprimării într-un nou limbaj. Până atunci orice inovație în raport cu limbajul nu putea fi privită decât așa cum a fost ea privită de fapt, ca o extravaganță ce nu răspunde unei probleme reale în logică.

Este de presupus că simbolismul se va generaliza în logică și va cuprinde domenii care încă nu se pretează la o abordare simbolică. Dintre disciplinele care s-au impus în ultima vreme, atât în ce privește conținutul de idei cât și limbajul, este logica modală. În afara simbolurilor specifice pentru operatorii modali, reține atenția noul

simbolism destinat analizării unor aspecte semantice (vezi discuția despre semantica lumilor posibile). La rândul ei, logica aplicată stimulează procesul dintr-o cu totul altă direcție.

În paralel cu tendința de specializare a limbajului pe discipline și teorii se face simțită tendința de uniformizare a lui, ceea ce reprezintă o altă particularitate a dezvoltării logicii la ora actuală. Limbajul matematic va rămâne în continuare o „rezervă" la îndemâna cercetării logice. Aplicațiile cu caracter metalogic care au cunoscul o puternică dezvoltare în ultima vreme, au adus în centrul atenției o serie de concepte matematice precum și simbolismul aferent lor. Despre aceste probleme voi vorbi însă ceva mai departe.

2. TIPURI DE LIMBAJE SIMBOLICE ÎN LOGICĂ

Există în momentul de față câteva tipuri mari de limbaje simbolice asupra cărora mă voi opri pe scurt în cele ce urmează. Este vorba de limbajul Peano-Russel, limbajul Lukasiewicz și limbajul aritmetic. Bineînțeles că la acesrea se adaugă limbajul natural care intervine în diferite forme în construcția logicii și care se dovedește indispensabil introducerii oricărui simbolism.

Limbajul Peano-Russel este tipul cel mai răspândit astăzi în logică și totodată cel mai apropiat de limbajul matematic uzual. Precizez că ceea ce dă tipul unui limbaj sunt în principal regulile de formare ale expresiilor. De altfel definiția inductivă a expresiilor în limbajul simbolic reprezintă una din principalele deosebiri față de limbajul natural.

În limbajul Peano-Russel se reproduce structura frazei din limbajul natural, mai precis modul de legare a propozițiilor în frază prin cuvintele de legătură „non", „și", „sau", „implică", ș. a. Faptul că unele dintre operațiile logice introduse prin aceste cuvinte au proprietăți similare operațiilor matematice a putut fi pus în evidență numai cu ajutorul simbolurilor. S-ar putea spune că aceasta este una dintre particularitățiile limbajului Peano-Russel importantă și pentru alte aplicații cu caracter matematic în logică.

Relativ la definiția limbajelor simbolice A.Church precizează: „un limbaj este definit atunci când avem o mulțime de simboluri primitive și regulile de formare și când avem... semnificații pentru expresiile limbii respective" (13; 407). Așadar, condițiile minime pentru construirea unui limbaj simbolic sunt: *1)* lista de simboluri, *2)* regulile de formare, și *3)* regulile de desemnare. Să exemplificăm aceste condiții pe limbajul logicii propozițiilor în cadrul tipului de limbaj pe care îl analizăm aici. Lista de simboluri primitive se compune din:

1) simboluri pentru variabile propoziționale: P, Q, R,...;

2) simboluri pentru operatorii logici propoziționali: ~ (non), · (și), ∨ (sau), → (implică), ≡ (echivalent)

3) simboluri auxiliare: (,); [,]; { , }

4) Constantele v și f pentru adevăr si fals (aici adevărul și falsul se iau ca obiecte abstracte fără să se țină seama de definiția conceptelor ca atare).

Reguli de formare:

R1. P, Q, R....sunt expresii.

R2. Dacă x și y sunt expresii atunci ~x, x · y, x ∨ y, x → y, x ≡ y vor fi de asemenea expresii.

Uneori se adaugă și o regulă de „închidere" prin care se precizează că nici o altă expresie nu poate fi formată în afara regulilor de mai sus. La un loc, aceste reguli formează o definiție inductivă pentru conceptul de „expresie în L". Iată și câteva exemple de expresii în limbajul Peano-Russel:

(P ·Q) ∨ R,

(P → Q) ∨ ~R,

[(P → Q) •R] ≡ (Q ∨ R).

Reguli de desemnare:

R1. Simbolurile pentru variabile desemnează elemente din mulțimea {v, f}.

R2. Simbolurile ~, ·, ∨, →, ≡, desemnează operațiile logice: non, și, sau, implică, echivalent.

În formularea celor două reguli am considerat ca semnificație a variabilelor cele două valori logice v și f. În *Principia Mathematica* semnificația unei variabile propoziționale este propoziția însăși nu

valoarea ei. Ambele procedee sunt în esență valabile fiecare cu propriile avantaje și dezavantaje.

Ca o categorie aparte de reguli de desemnare, pot fi considerate și *regulile de adevăr*. Reamintesc că prin aceste reguli se stabilește valoarea unei expresii compuse plecându-se de la valoarea elementelor ei componente. Pentru negație și conjuncție aceste reguli arată astfel:

1) Dacă ~P = v atunci P = f (și invers)

2) Dacă P = Q = v atunci P•Q = v, etc.

Prin „P ·Q = v" înțelegem că „P ·Q este adevărată" sau „P ·Q îl desemnează pe v". Acest mod de exprimare este în spiritul concepției lui Frege pentru care propozițiile adevărate (respectiv false) sunt nume diferite ale adevărului (respectiv falsului).

Pentru limbajul logicii predicatelor la simbolurile de mai sus se adaugă simboluri noi, specifice exprimării prin predicate. Ele se clasifică în următoarele patru mari grupe:

1) simboluri pentru variabile individuale: x, y, z,...;

2) constante individuale: *a,b,c,...*;

3) simboluri pentru predicate: F,G,H,...;

4) simboluri pentru cuantori: ∀, ∃.

În funcție de scopurile urmărite se mai pot adăuga și alte simboluri, aici m-am limitat la strictul necesar.

Regulile de formare sunt și ele asemănătoare celor invocate la început:

1) F(x), G(x), H(x),...sunt expresii.

2) Dacă A este o expresie în care apare liberă variabila x, atunci „∀xA și ∃xA sunt de asemenea expresii. Prin „variabilă liberă" se înțelefe variabila care nu este afectată de unul din cei doi cuantori.

Câteva exemple de expresii în limbajul logicii predicatelor:

F(x), G(x),

∃ x F(x) → H(y),

P ∨ ∃ x F(x).

Cu ajutorul acestui limbaj pot fi studiate diferite structuri și forme propoziționale folosite la scară largă în limbajul natural. Așa cum arată Gh. Enescu, „redarea raționamentelor din limbajul natural în limbajul predicatelor este problema numărul unu a analizei logice

moderne a gândirii intuitive. Ea este de o importanță capitală pentru analiza logică și formalizarea teoriilor științifice"(19; 95).

Într-un limbaj simbolic sistemul de simboluri poate fi extins sau restrâns, după nevoie, pe baza unor definiții. Se consideră, în general, că aceste definiții nu aduc nimic nou din punct de vedere al conținutului, că ele sunt simple abrevieri sau „convenții tipografice" cum se afirmă în *Principia Mathematica*. Iată cum exprimă J.Lukasiewicz această idee într-una din lucrările de început ale logicii matematice: „Dacă există o teorie în care definițiile nu apar atunci nimic nou nu poate fi obținut în teorie după introducerea definițiilor cu excepția faptului că forma unor teoreme poate fi schimbată ca urmare a înlocuirii definiendumului cu definiensul" (47; 32). În prefața la ediția a doua a *Principiei Math.*, B.Russel pune problema reducerii simbolismului logic la simbolul „ / " pentru operatorul lui Scheffer. O asemenea reducție nu sporește însă cu nimic claritatea și eficiența limbajului. Dimpotrivă, se poate spune că utilizarea unui singur simbol conduce la expresii foarte complicate, greu de mânuit în calcul și destul de îndepărtate de intuiția logică. Legat de acest aspect trebuie să discutăm și o altă problemă și anume problema raportului dintre semnificația și sensul expresiilor într-un limbaj simbolic. Se știe că semnificațiile expresiilor care intră într-o definiție este aceeași dar nu se poate spune că și sensul expresiilor este același. Una este să afirmi „P Q" și alta „~(P ∨ ~Q)" deși aceste expresii sunt echivalente logic (au aceeași semnificație). Același lucru este valabil și pentru expresiile ∀x Fx și ~∃x~Fx. Logica sensurilor nu ține seama întotdeauna de logica semnificațiilor.

Câteva precizări în încheiere despre limbajul Lukasiewicz. Acest limbaj diferă de limbajul Peano-Russel atât în privința regulilor de formare cât și a sistemului de simboluri. În plus el nu conține paranteze ceea ce este o mare diferență. Alfabetul lui conține simboluri pentru variabile (p,q,r,...) și simboluri pentru operatorii logici cunoscuți: N(non), K(și), A(sau), C(implică), E(echivalent). La acestea se mai adaugă cei doi cuantori Π, Σ deși ei sunt mai puțini utilizați în logica propozițiilor. Regulile de formare se enunță asemănător celor exemplificate deja:

1) p,q,r,... sunt expresii

2) Dacă x, y sunt expresii atunci Nx, Kxy, Axy, Cxy şi Exy vor fi de asemenea expresii. Iată şi câteva exemple de „traduceri" din limbajul Peano-Russel în limbajul Lukasiewicz:

$(p \cdot q) \cdot r$	KKpqr
$p \rightarrow (p \vee q)$	CpApq
$p \rightarrow [\sim p \equiv \sim (p \vee q)]$	CpENpNApq

În acest gen de scriere lipsesc parantezele, operatorul se plasează înaintea variabilelor iar citirea formulei începe de la ultimul operator din dreapta spre primul din stânga. Limbajul este foarte simplu şi permite cele mai elegante prezentări ale sistemelor axiomatice din logica propoziţiilor şi a predicatelor. Deşi prezintă toate caracteristicile unui limbaj simbolic, limbajul lui Lukasiewicz reprezintă totuşi cea mai radicală deosebire a simbolismului logic de simbolismul matematic uzual. Lukasiewicz îl va extinde şi asupra silogisticii unde expresiile Asp, Esp, Isp şi Osp corespund celor patru propoziţii de predicaţie. Simbolurile A, E, I, O, unifică cuantorul cu copula (ex. „toţi...sunt", „unii...nu sunt..." etc.) dând un fel de operatori logici care pot fi studiaţi în manieră pur formală. Diversele modele matematice ale silogisticii au putut fi construite plecându-se tocmai de la proprietăţile formale ale acestor operatori.

3. LIMBAJUL ARITMETIC ÎN LOGICĂ

La începutul acestui capitol am făcut unele consideraţii cu privire la contribuţiile aduse de Leibniz la dezvoltarea simbolismului logic. Printre preocopările lui un loc important îl ocupă încercarea de a introduce în logică limbajul aritmetic. Logica modernă a reluat aceste idei, la alt nivel, se înţelege, şi în alţi termeni, deschizând un câmp larg aplicaţiilor cu caracter aritmetic. Trebuie spus de la început însă, că ceea ce se utilizează aici nu sunt numerele ca atare (conceptele) ci simbolurile lor, adică cifrele. Atât la nivel semantic cât şi sintactic, aplicaţiile cu caracter aritmetic vizează cu prioritate limbajul. Voi încerca să demonstrez acest lucru în cele ce urmează luând drept cadru de referinţă câteva din cele mai cunoscute teorii logice. O întrebare se

ridică de pe acum în raport cu toate aceste aplicații: *limbajul aritmetic are în logică aceeași destinație cu limbajele examinate până acum sau el vizează un cu totul alt gen de probleme?*

3.1. LIMBAJUL ARITMETIC LA LEIBNIZ

Relativ la propoziția categorică „S este P" Leibniz formulează următoarea problemă: fiind dat un termen oarecare să se determine toate predicatele lui, în cazul în care termenul apare în propoziție în postura de subiect logic, respectiv toate subiectele lui în cazul în care termenul apare în postura de predicat. Este de departe vizibil că această problemă nu mai este de natură aristotelică și că ea nu poate fi rezolvată în limitele și cu mijloacele logicii tradiționale. Din felul în care este ea formulată, predicatele unui subiect apar ca un fel de divizori ai unui număr iar subiectele unui predicat ca multiplii ai lui. De fapt procedeul lui Leibniz se bazează tocmai pe analogia cu ideea de diviziune și multiplicare cum vom avea ocazia să vedem în cele ce urmează.

Leibniz consideră termenii unei propoziții în sensul logicii tradiționale, ca expresii ale unor concepte, numai că la el conceptele se împatr în două categorii: *1)* concepte prime și nedefinite, și *2)* concepte compuse din concepte prime. Conceptele din prima categorie sunt numite „termeni primi" și la un loc formează ceea ce mai târziu el va numi „alfabetul gândirii umane". Termenii sunt ordonați pe clase după cum urmează:

Prima clasă: cuprinde toți termenii primi.

A doua clasă: cuprinde perechi de termeni din prima clasă.

A treia clasă: cuprinde triplete de termeni din prima și a doua clasă, ș.a.m.d.

Pentru a face pe deplin inteligibil procedeul său, Leibniz introduce simboluri literare $(a,b,c,...)$ pentru termenii primi. A doua clasă va cuprinde atunci perechile ordonate (a,b), (a,c), (b,c),...; A treia clasă cuprinde triplete (a,b,c), (a,c,b), (b,c,d), (a,c,d), etc.

Predicatele unui subiect sunt fie termeni primi fie termeni derivați din termeni primi (în funcție de modul în care se formează

subiectul). Dacă „*abc*" formează termenul A, să zicem, atunci predicatele lui vor fi *a*, *b*, *c*, *ab*, *ac*, *bc*, *abc*. Se obțin deci propozițiile:
"*abc* este *a*,"
"*abc* este *b*,"
"*abc* este *ab*"
.....

Înțelegem acum de ce susține Leibniz că propozițiile logice adevărate sunt fie propoziții de identitate fie propoziții reductibile la propoziții de identitate. Pe de altă parte propozițiile logic adevărate sunt propozițiile în care predicatul este cuprins în subiect (*predicatum inest subjecto*).

În *De arte combinatorica*, Leibniz încearcă să aplice procedeul său sistemului de definiții din *Elementele* lui Euclid. Termenii primi sunt numerotați (un fel de aritmetizare pregödeliană) iar definițiile se obțin în baza diferitelor corelații dintre numere. Astfel, prima clasă cuprinde o enumerare de 27 concepte ale geometriei euclidiene: 1.Punct, 2.Spațiu, 3.Între, 4.Adiacent, 5.Depărtat, 6.Extremitate,..., 26.Comun, 27.Progresie.

A doua clasă constă, așa cum am văzut, din perechi de numere din prima clasă. Dacă luăm perechea (9, 14) vom obține definiția termenului „cantitate" întrucât „cantitatea este numărul părților". Aici „parte" are numărul 9 iar „număr", 14. A treia clasă cuprinde termeni cum ar fi „interval" definit prin tripletul (2, 3, 10) care corespunde definiției „intervalul este spațiul dintre întreguri".

Leibniz folosește în aceleași scopuri fracțiile ordinare a căror numărător indică clasa iar numitorul indică numărul din clasa respectivă. Astfel, 1/10 va însemna al zecelea termen din prima clasă, adică termenul „parte". Numărul fracționar 1/3×1×2 este numărul asociat definiției segmentului („distanța dintre două puncte"). Dacă prin simplificare fracțiile sunt identice atunci și conceptele asociate lor sunt identice prin definiție.

În *Elementa calculi* Leibniz încearcă să demonstreze că termenii se compun în propoziție într-o manieră similară operației de înmulțire din aritmetică. Cele două lucrări conțin în germene ideile de aritmetizare și calcul pe care le va dezvolta în diferite modalități mai târziu În *Regulae de bonitate consequentiarum* el va duce până la

capăt ideea de model aritmetic pentru silogistică, idee preluată în secolul nostru de către J.Suplecki. De altfel multe din ideile lui Leibniz vor constitui puncte de plecare pentru abordările cu caracter matematic de mai târziu.

3.2. LIMBAJUL ARITMETIC ÎN LOGICA PROPOZIȚIILOR

Pentru desemnarea celor două valori logice (adevărul şi falsul) se folosesc de regulă simbolurile v şi f însă pot fi folosite în acest scop orice fel de simboluri. Nu are importanță notarea ca atare ci raporturile formale pe care cele două obiecte abstracte le stabilesc relativ la diferitele operații logice. Se obişnuieşte astăzi ca pentru desemnarea lor să se folosească cifrele. Am văzut că încă în secolul trecut Hug McColl nota adevărul cu 1 iar falsul cu 0. Acest procedeu s-a încetățenit între timp şi a dat naştere la alte aplicații cu caracter aritmetic în logică. În primul rând au fost reinterpretate aceste simboluri conform semnificațiilor lor inițiale iar operațiile logice au putut fi redate în forma unor operații aritmetice. Iată cum apar la A.N.Prior aceste corelații logico-aritmetice relativ la teoria funcțiilor de adevăr: „Dacă 1 şi 0 au sensul lor uzual, simbolul K definit prin K11 = 1, K10 = K01 = K00 = 0, ar putea fi reprezentate complet prin operația dc înmulțire şi nu este dificil să găsim operații aritmetice care să înlocuiască într-un mod analog şi alți operatori logici. De exemplu am putea obține ecuațiile N1 = 0 şi N0 = 1 dacă interpretăm pe N ca pe operația de scădere din 1. Şi pentru că ştim că Cpq are aceeaşi valoare cu NKpNq putem găsi o interpretare aritmetică pentru Cpq. Aceasta este: Cpq = 1 – p(1 – q) (57; 230).

Urmând sugestiile lui Prior din acest pasaj putem obține următoarele definiții aritmetice pentru principalii operatori logici:

Np = 1 – p,

Kpq = pq,

Apq = p + q – pq

Cpq = 1 – p(1 – q)

Epq = (1 – p) – q(1 – 2p).

Definițiile în cauză se sprijină pe anumite analogii între operațiile logice definite pe mulțimea {v, f} şi operațiile aritmetice

definite pe mulțimea {1, 0}. Menționez ca o curiozitate faptul că în reprezentarea aritmetică a adevărului și falsului putem inversa raporturile notând adevărul cu 0 și falsul cu 1. Apar aceleași expresii aritmetice însă fiecare va corespunde dualului expresiei inițiale. Dacă „p + q – pq" a corespuns disjuncției în primul caz, acum ea va corespunde conjuncției. Acest lucru apare foarte clar în tabelul de mai jos:

A	B	C
$\sim p$	1 - p	$\sim p$
$p \bullet q$	pq	$p \vee q$
$p \vee q$	p + q - pq	$p \bullet q$
$p \rightarrow q$	1 - p + pq	$\sim(q \rightarrow p)$

Relațiile A - B corespund definițiilor aritmetice în convențiile obișnuite, adică v = 1 și f = 0. Relațiile C - B corespund definițiilor aritmetice în convenția v = 0 și f = 1, iar relațiile A - C corespund relațiilor de dualitate. Toate celelalte probleme rămân aceleași, singurul aspect important constituindu-l raportul de dualitate obținut prin inversarea semnificațiilor.

Câteva observații pe marginea definițiilor logico-aritmetice de mai sus. În primul rând trebuie spus că aceste definiții se datorează faptului că, împreună, negația și conjuncția transcriu orice alt operator propozițional. Totuși, analogiile dintre operațiile logice și cele aritmetice se limitează la cele două operații logice menționate fără să fie valabile în rest. Dacă pentru conjuncție interpretarea aritmetică permite redarea tuturor proprietăților ei formale, pentru implicație - relația fundamentală a logicii - aceste proprietăți nu mai sunt „transparente" în această interpretare. Din expresia „1 – p(1 – q)" care corespunde implicației, nu ne putem da seama că implicația este o relație reflexivă, antisimetrică și tranzitivă. De asemenea, nu se poate reda proprietatea contrapoziției și nici regulile de deducție bazate pe implicație. Ne dăm seama, așadar, că nu se poate vorbi de o „aritmetizare" a logicii în sensul dizolvării ei într-un fragment al aritmeticii, ci de un sistem foarte limitat de analogii utile până la un punct dar care nu ne dau dreptul să trecem peste diferențele mari ce pot să apară. De regulă aceste analogii privesc un număr restrâns de

operatori, cum s-a putut observa, pentru care pot fi găsite încă multe alte interpretări. Pentru că ele nu prezintă un interes prea mare pentru logică nu insist mai mult asupra lor. Un anume interes prezintă relația „≤" care ordonează mulțimea {0, 1} corespunzătoare celor două valori logice. Pentru că relativ la „≤" se pot defini conceptele de min (= minim) și max (= maxim), operatorii propoziționali se pot redefini astfel:

$p \cdot q = \min(p,q)$,

$p \vee q = \max(p,q)$,

$p \rightarrow q = \min(1 - p, q)$, sau

$$p \rightarrow q \begin{cases} 1 \text{ dacă } p \leq q \\ 0 \text{ dacă } p > q \end{cases}$$

Sunt importante aceste definiții pentru logică? Chiar dacă sunt mai puțin adecvate exprimării unor raporturi logice generale (raporturi inferențiale de exemplu), nu se poate nega importanța lor în unele probleme de interes mai special. În logica bivalentă, cel puțin, aceste definiții pot fi aplicate cu succes în rezolvarea problemei deciziei, a minimizării expresiilor, ș.a. În metalogică ele și-au dovedit utilitatea în legătură cu demonstrațiile unor importante proprietăți ale sistemelor axiomatice. În sfârșit, logica polivalentă utilizează la scară largă definițiile aritmetice mai ales că valorile de adevăr se notează aici cu numere reale din intervalul cuprins între 0 și 1. Ele au permis construirea unei întregi „familii" de sisteme n-valente deși foarte puține au o interpretare logică corespunzătoare.

3.3. LIMBAJUL ARITMETIC ȘI SISTEMELE DE NUMERAȚIE

Interpretarea valorilor logice prin valori numerice poate genera și alte corelații decât cele examinate până acum. Unele dintre ele vizează posibilitatea transcrierii unui număr dintr-un sistem de numerație în altul. În articolul său *Les lois arithmétique de la verité* (Analele Univ. București seria Acta Logica, nr. 7-8, 1964/65). Gh.Enescu oferă o astfel de aplicare a sistemelor de numerație în

abordarea unor probleme de logică. În rezumat, procedeul lui Gh.Enescu constă în următoarele:

1) Se numerotează funcțiile de adevăr de la stânga la dreapta cu numere naturale obținându-se astfel succesiunea: $f_0, f_1, f_2, ..., f_{15}$.

2) Se transcriu numerele de ordine ale funcțiilor din sistemul zecimal în cel binar iar secvența de 0 și 1 obținută se consideră a fi valoarea funcției:

f_0 - 0000

f_1 - 0001

f_2 - 0010

.....

f_{15} - 1111

3) Numărul total de cifre din reprezentarea binară trebuie să fie 2^m, unde m reprezintă numărul valorilor logice. Dacă reprezentarea binară se face printr-un număr mai mic de cifre se va adăuga cifra 0 de la stânga la dreapta până se va completa numărul de 2^m cifre.

4) Numărul total de funcții se calculează după formula $N = 2^{m^n}$ unde m reprezintă numărul valorilor de adevăr iar n numărul variabilelor.

Să notăm cu f'i negația funcției fi. În succesiunea funcțiilor f0,f1,...,f15 se pot stabili acum următoarele corelații:

f'i = fmax – fi

fi + f'i = fmax

f'max= f0; f'0 = fmax

fi = fi

fi + f'i = f0

(În aceste relații f max este f N-1 și corespunde tautologiei iar f0 corespunde contradicției). Cititorul poate identifica cu ușurință în aceste relații expresia aritmetică a unor binecunoscute principii logice (principiul noncontradicției, terțului exclus etc.). Interpretarea zecimală a funcțiilor de adevăr mai prezintă următoarele avantaje:

a) Se poate da o funcție de adevăr numai prin numărul ei de ordine putându-se „calcula" apoi definiția ei matricială, numărul de valori de adevăr și numărul de variabile.

b) Procedeul poate fi extins și asupra logicilor polivalente unde numărul funcțiilor de adevăr crește impresionant. În sistemele trivalente cele mai cunoscute (Lukasiewicz, Bocivar, Kleene, ș.a.) sunt

studiate numai câteva din aceste funcții toate celelalte rămânând practic neutilizate. De altfel într-un studiu ulterior, *Cu privire la reprezentarea cifrică a funcțiilor de adevăr* (Analele Univ. București, 1982), Gh.Enescu revine asupra problemei dând unele precizări cu privire la unificarea sistemelor polivalente și la posibilitatea interpretării lor unele prin altele.

3.4. ARITMETIZAREA GÖDELIANĂ

Mergând pe cu totul altă cale decât cea a analogiilor dintre operațiile logice și cele aritmetice, Gödel a elaborat un procedeu prin care sistemele formale de tipul *Principiei mathematica* să fie reprezentate aritmetic ca într-un fel de cifru. În esență, procedeul constă în asocierea simbolurilor prime și expresiilor cu numere prime în baza unor reguli de corespondență precis formulate. Prin acest procedeu Gödel a reușit să arate că în astfel de sisteme pot fi construite propoziții care, deși adevărate, nu pot fi demonstrate nici infirmate în limitele și cu mijloacele sistemului.

Altfel spus, sistemele formale considerate sunt principial incomplete (în supoziția, evident, că ele sunt totuși consistente). Demonstrația lui Gödel prezintă pentru logica matematică și fundamentele matematicii cel mai important rezultat obținut prin aplicarea unor procedee aritmetice. Prima expunere a acestei demonstrații, și singura până acum, în literatura noastră de specialitate, i-o datorăm lui Gh.Enescu (vezi *Teoria sistemelor logice*, pag. 256).

Gödel a plecat de la elementul esențial al formalizării așa cum o concepuse Hilbert în raport cu matematica și anume de la faptul că „pentru considerații matematice nu are importanță ce obiecte sunt alese ca semne primitive ceea ce înseamnă că putem utiliza în acest scop numere naturale. În consecință, o formulă va fi o secvență finită de numere naturale iar o demonstrație o secvență finită de secvențe finite de numere naturale. Noțiunile (respectiv propozițiile) matematice vor deveni astfel noțiuni (respectiv propoziții) despre numerele naturale sau secvențele acestora; ele pot fi (cel puțin în parte) expimate prin simboluri ale sistemului PM însuși. În particular

se poate demonstra că noţiunile *formulă, demonstraţie* şi *formulă demonstrabilă* pot fi definite în PM" (29; 607).

Din punct de vedere matematic procedeul lui Gödel are la bază teorema fundamentală a aritmeticii potrivit căreia orice număr întreg este sau prim sau un produs de numere prime. Dacă se asociază, aşadar, simbolurile de bază din alfabetul unui sistem formal cu numere prime, atunci oricărei expresii construite din aceste simboluri îi va corespunde un număr şi invers, orice număr descompus în factori primi va corespunde unei expresii.

Înainte de a da regulile de corespondenţă între mulţimea numerelor prime şi mulţimea simbolurilor voi face o succintă prezentare a sistemului formal P, varianta simplificată a sistemului PM pe care lucrează Gödel. Semnele de bază ale sistemului sunt:

1) constantele ~ (non), ∨ (sau), Π (oricare), 0 (zero), şi f (succesor).
2) variabile de tip 1 pentru numere, inclusiv zero: x_1, y_1, z_1,...;
3) variabile de tip 2 pentru clase: x_2, y_2,...;
4) variabile de tip 3 pentru clase de clase: x_3, y_3,...;

Funcţiile de două sau mai multe variabile la fel ca şi relaţiile nu fac parte din categoria semnelor prime. În continuare se postulează următoarele corespondenţe între semne şi numerele prime:

„O".....1; „~".....5; „P".....9;
„f".....3; „∨".....7; „(".....11; „)".....13

Variabilelor de tip n li se asociază numere prime de forma p^n unde p este un număr prim mai mare ca 13. De exemplu, x_2 va avea numărul 17_2. Unei secvenţe de semne de bază care are numerele n_1, n_2,...,n_k i se asociază produsul de factori primi $2^{n_1} \times 3^{n_2} \times ... \times Pk^{n_k}$. Să exemplificăm această regulă pentru expresia x_2 (x_1). Numărul n_1 asociat lui x_2 va fi 17_2; n_2 va fi 11; n_3 va fi 19 iar n_4 va fi 13. Deci numărul formulei $x_2(x_1)$ va fi $2^{17^2} \times 3^{11} \times 5^{19} \times 7^{13}$. Notăm în continuare cu $\Phi(a)$ numărul gödelian al formulei *a* şi cu $R(a_1, a_2,..., a_n)$ o relaţie între semne prime sau secvenţede semne prime. Acestei secvenţe i se asociază relaţia $R'(x_1, x_2,..., x_n)$ între numerele naturale $x_1, x_2,..., x_n$ dacă şi numai dacă are loc condiţia $\Phi(a_i) = x_i$ (pentru i = 1, 2,..., n).

Acest mod de cifrare a simbolurilor şi expresiilor în PM este utilizat în construcţia propoziţiei indecidabile. Respectiva propoziţie asertează tocmai consistenţa sistemului ceea ce înseamnă că în sistemele de tipul PM între consistenţă şi completitudine există o incompatibilitate de principiu.

Se pune în mod firesc întrebarea ce raport există între teorema lui Gödel şi procedeul aritmetizării. Este clar că la această întrebare nu se poate răspunde simplu. Ce pot spune deocamdată este că teorema lui Gödel exprimă o proprietate fundamentală a sistemelor de tipul PM şi că demonstraţia ei presupune „aritmetizarea" sistemelor respective. Sunt reprezentate aritmetic diferite concepte şi propoziţii metateoretice dintre care una, cea care asertează consistenţa sistemului nu poate fi demonstrată. În supoziţia că ea ar fi totoşi demonstrabilă (şi că sistemul este astfel complet) ar urma ca sistemul să fie inconsistent. De aici raportul de contrarietate dintre consistenţă şi completitudine (cele două concepte nu pot fi asertate împreună despre unul şi acelaşi sistem dar pot fi negate). Dacă ţinem seama de precizarea lui Gödel că demonstraţia teoremei satisface criteriul intuiţionist al constructivităţii, atunci teorema este ea însăşi o consecinţă a aritmetizării pentru că aritmetizarea permite construirea efectivă a propoziţiei indecidabile.

Teorema lui Gödel are consecinţe din cele mai adânci atât asupra logicii cât şi asupra matematicii. Din punct de vedere matematic ea a zădărnicit, aşa cum am arătat în *Introducere*, programul hilbertian de reorganizare a matematicii în forma unor sisteme formale. Un astfel de sistem nu poate reproduce toate propoziţiile adevărate relativ la un anumir domeniu de obiecte pentru simplul motiv că el este principial incomplet.

În plan logic teorema lui Gödel a stimulat descoperiri importante dintre care aş aminti soluţia negativă a problemei decizie pentru calculul cu predicate de ordinul întâi (A.Church, 1936) Deosebit de interesante sunt şi implicaţiile acestei teoreme în problema paradoxelor. De altfel în variantă neformalizată Göde expune rezultatul său în forma unui paradox. În lucrarea citată Gh.Enescu arată cum se corelează paradoxul lui Gödel cu paradoxu mincinosului sau cu paradoxul lui Richard (relativ la procedeu

raţionamentului diagonal). În sfârşit, teorema lui Gödel aduce o lumină nouă în problema adevărului demonstrând că sfera conceptului *adevăr* nu este aceeaşi cu sfera conceptului *demonstrabil*.

4. LIMBAJUL FORMALIZAT ÎNLOGICĂ ŞI MATEMATICĂ

Termenul de „limbaj formalizat" a fost introdus de A.Tarski cu intenţia de a face deosebirea dintre limbajul natural şi limbajul teoriilor ştinţifice în primul rând a celor dedective. Principiile de construcţie pe care la postulează Tarski relativ la limbajul formalizat sunt următoarele:

1) „Pentru fiecare din aceste limbaje se indică sau descrie (în mod structural) toate semnele din care sunt compuse expresiile limbajului" (69; 172)

2) „Ţinând cont de proprietăţiile structurale se delimitează în mulţimea expresiilor posibile acele expresii care pot fi numite propoziţii" (69; 172)

Termenul „propoziţie" apare aici pentru a păstra analogia cu limbajul natural, în mod obişnuit vorbim, însă, de „formule" sau „expresii" şi nu de „propoziţii". Tarski face precizarea că, în general, limbajul şi teoria constituie un „întreg organic" astfel că atunci când vorbim de un anumit limbaj formalizat noi vorbim de fapt de limbajul unei anumite teorii (formalizate). Din această cauză proprietăţile limbajului se manifestă în strictă dependenţă de metoda de construcţie a teoriilor în cauză. Aceasta face ca la cele două principii de construcţie enunţate mai sus, Tarski să adauge alte două principii care vizează de data aceasta structura deductivă a teoriei. Ele se formulează după cum urmează:

3) "Se indică, sau se descrie structural, o anumită categorie de propoziţii numite *axiome* sau *propoziţii prime*" (69; 172)

4) "Se indică reguli speciale numite *reguli de inferenţă* care determină anumite operaţii ce permit transformarea propoziţiilor în alte propoziţii" (69; 172)

Propozițiile obținute ca urmare a aplicării regulilor de deducție se numesc *consecințe*. În raport cu axiomele, consecințele se numesc *teze*.

În ceea ce privește semnificația semnelor și expresiilor se arată mai departe că: „acestor semne ale limbajului care fac obiectul considerațiilor de față, noi le atribuim întotdeauna semnificații concrete și inteligibile; expresiile numite propoziții rămân propoziții chiar și atunci când sunt traduse în limbajul cotidian. Propozițiile luate ca axiome ne apar ca fiind intuitiv adevărate; alegerea regulilor de deducție este condusă de dorința de a asigura trecerea de la propozițiile admise ca adevărate la noi propoziții adevărate" (69; 173).

Acest pasaj este important nu numai pentru precizările aduse în problema semnificației semnelor și expresiilor, ci și pentru modul în care sublinează legăturile foarte strânse dintre limbajul formalizat și limbajul natural. De altfel Tarski atrage atenția asupra pericolului pe care îl prezintă pentru știință (în special pentru logică și matematică) formalismul abstract, golit de orice legătură cu conținutul. Se pare că această recomandare făcută de Tarski în primul studiu destinat limbajelor formalizate nu a fost prea mult respectată în anii din urmă. Iată ce scrie în acest sens Gh.Enescu în cunoscutul său *Dicționar de logică*: „Știind cât de impresionat e omul de rând (sau în general cei nepricepuți în „limbajul matematic") simbolizarea și formalizarea pot să dea impresia nejustificată de *profunzime* datorită ermetismului (adică a lipsei de comunicare). Pentru a preveni ermetismul și superficialitatea în simbolizare și formalizare este necesar să asigurăm trecerea și, respectiv introducerea într-un limbaj conceptual (intuitiv)" (22; 118).

În sinteză, limbajul formalizat apare definit la Tarski prin: a) lista de simboluri, b) regulile de formare, c) regulile de desemnare, d) axiomele și regulile de deducție. Această concepție va suferi modificări impuse în primul rând de problemele pe care le ridică construcția limbajelor formalizate în diferite teorii ale logicii și matematicii. O asemenea modificare apare la R.Carnap pentru care limbajul formalizat este dat prin a) lista de simboluri, b) regulile de formare, c) regulile de desemnare d) regulile de domeniu și e) regulile de adevăr. Gh.Enescu va introduce o modificare în sensul generalizării

condițiilor ce definesc limbajul formalizat. Pentru logicianul român, în construcția unui limbaj formalizat sunt indispensabile a) lista de semne elementare, b) regulile de formare și c) regulile de desemnare (sau semnificare). Această definiție postulează numai condițiile necesare limbajului formalizat de aceea ea este mult mai generală decât cele introduse mai sus.

Limbajul formalizat are, în opinia lui Tarski, câteva trăsături mai importante prin care se deosebește de orice alt tip de limbaj, în primul rând de cel natural:

1) Este *limitat* la un domeniu anume. Aceasta face ca el să nu poată exprima tot ceea ce în general poate fi exprimat (nu este *universal*, cu alte cuvinte).

2) Nu este *închis*. Conceptul de „închidere" în raport cu limbajul se referă la faptul că nu pot fi formulate expresii care să se refere la limbajul însuși. Tarski demonstrează că această particularitate este importantă penrtu explicarea antinomiilor semantice.

3) Este *precis*. Prin regulile de formare și de desemnare știm de la început dacă o succesiune de simboluri este o expresie și ce anume desemnează ea.

4) Relativ la limbajul formalizat pot fi definite într-un mod riguros o serie de concepte fundamentale ale logicii cum ar fi conceptul de *adevăr*, de *consecință logică*, ș.a.

5) Pornind de la sintaxa unui limbaj formalizat se poate introduce de asemenea conceptul de *sistem sintactic* și cel de *sistem formal*. Primul se definește ca un sistem obținut prin detașarea sistemului de semne al unui limbaj formalizat de latura lui semantică. Sistemul formal va fi atunci orice sistem sintactic și orice reprezentare sintactică a lui.

Astăzi limbajele formalizate sunt utilizate la scară largă atât în logică cât și în matematică. Construcția lor diferă de la caz la caz însă principiul este în general același. Limbajul matematic este mai bogat, el îl conține pe cel logic la care se adaugă o serie de elemente specifice în funcție de complexitatea domeniului ce urmează a fi investigat. În ultima vreme abordarea pe bază de limbaje formalizate tinde să se extindă și asupra altor discipline dovadă că metoda este pe cale de a se generaliza.

5. CONCLUZII

Cele discutate până acum permit fixarea câtorva concluzii mai generale cu privire la locul şi rolul simbolismului în relaţiile dintre logică şi matematică.

1) În toate fazele dezvoltării ei, logica a demonstrat că nu se poate dispensa de un minim de simbolism. Primele simboluri apar încă la Aristotel, un fel de variabile pentru termeni cum s-a spus pe bună dreptate. Important este că aceste simboluri nu vizau de la început ideea de funcţie, ca în matematică, ci ideea de formă logică. După părerea mea, conceptul de formă logică este unul din primele concepte ale logicii care reclamă utilizarea simbolurilor.

2) În cele mai multe ştiinţe care folosesc astăzi limbajele simbolice nu avem de-a face cu un simbolism specific, ceea ce intervine aici este tot simbolismul matematic. „Toate disciplinele ştiinţifice - arată Gr.Moisil - au fost obligate în momentul creării lor să-şi constituie un limbaj propriu, iar în momentul deplinei lor maturităţi, acest limbaj a fost redus la limbajul matematic" (51; 73). Logica a dovedit că se abate de la această regulă întrucât simbolismul pe care ea l-a adoptat este un simbolism specific care diferă, după cum s-a văzut de cel matematic. Există şi alte ştiinţe astăzi care evoluează în aceeaşi direcţie.

3) Utilizarea simbolismului este importantă în logică şi sub un alt aspect. Foarte multe probleme ale logicii tradiţionale au putut fi reluate în formă simbolică ceea ce a permis soluţionarea lor cu mijloacele logicii moderne. „Opera lui Lukasiewicz şi a urmaşilor săi - scrie Gr.Moisil - arată cât de mult adoptarea scrierii simbolice şi cunoaşterea logicii matematice pot contribui la înţelegerea gândirii lui Aristot, a unui Teofrast, şi a altora" (51; 421). Într-adevăr, Lukasiewicz a reuşit să definească ideea modală de *posibil* plecând de la aserţiunile lui Aristotel pe care le-a exprimat în formă simbolică. Iată deci că limbajul simbolic este în măsură să deservească şi alte compartimente ale logicii decât cele pentru care a fost introdus el în mod expres.

4) Analogiile limitate dintre logică şi aritmetică au permis utilizarea limbajului aritmetic în rezolvarea unor probleme mai speciale ale

logicii. Acest lucru s-a realizat în două moduri: a) prin redarea operațiilor logice în forma operațiilor aritmetice, și b) prin asocierea de numere elementelor structurale ale limbajului (v. Leibniz, Gödel, ș.a.). Și într-un caz și în celălalt limbajul aritmetic are o sferă destul de restrânsă de aplicație, el nu poate fi considerat a fi un înlocuitor al limbajelor propriu-zis logice.

5) Este adevărat că logica a reprezentat, și continuă să reprezinte, un câmp de experiență pentru limbajul matematic dar de aici nu rezultă că orice generalizare spre logică duce neapărat la rezolvarea de probleme noi. Simbolizarea de dragul simbolizării poate duce la obscurități. Or, arata la vremea lui, Hilbert, simbolismul trebuie să ducă în logică la ceea ce a dus și în matematică adică la tratarea exactă, riguroasă a conținutului ei.

6) Formele logice fiind universale, independente de domeniile particulare ale gândirii, este în interesul logicienilor să mențină comunicarea cu toate aceste domenii. Problema alegerii simbolismului nu este doar o necesitate internă a dezvoltării logicii, ci exprimă o nevoie de ordin pragmatic. Nu este în interesul nimănui blocarea logicii în relațiile ei cu matematica și izolarea de cei ce se ocupă de domenii nematematizate. O concepție justă în această privință a dezvoltat la noi tot Gr.Moisil: „...Limbajul logicii simbolice având toate aceste caracteristici ale limbajului matematic ce-l face dezagreabil cititorului obișnuit, are în plus defectul de a fi deosebit de limbajul matematic, și ca atare rămâne neinteligibil la prima lectură chiar pentru matematicianul rutinat" (51; 74). Se impune, așadar, deschiderea în ambele direcții, atât spre matematică cât și spre științele matematizate.

7) Diversificarea simbolismului în logică nu trebuie privită ca o eliminare completă a limbajului natural. Dincolo de faptul că limbajul natural este o permanentă sursă de aplicații pentru logică, el este indispensabil în introducerea și utilizarea oricărui simbolism.

CAP. II

CÂTEVA CONCEPTE FUNDAMENTALE ÎN LOGICĂ

Într-un domeniu ştiinţific oarecare pot să apară la un moment dat concepte şi metode care să fie multă vreme legate de domeniul respectiv, dar care cu timpul să poată fi generalizate dincolo de natura concretă a entităţilor în legătură cu care ele au apărut. Generalizarea se face în două moduri: fie că se extinde sfera de aplicabilitate a conceptelor respective, fie că se „extrag" anumite trăsături ale lor care sunt corelate apoi cu alte concepte şi procedee. Trebuie să distingem, aşadar, între originea conceptelor şi metodelor respective şi destinul lor ulterior. Desigur că aplicaţiile se pot întoarce asupra teoriilor de origine îmbogăţindu-le cu noi „fapte" particulare şi în felul acesta cu noi posibilităţi de generalizare. Unele concepte ale matematicii tradiţionale cum ar fi *mulţime, funcţie, structură matematică,* au putut fi generalizate în sensul al doilea invocat mai sus. Excepţie face conceptul de *număr* care rămâne în continuare un concept specific matematicii şi ale cărei aplicaţii logice ridică, aşa cum vom vedea, probleme mult mai speciale.

Cu ce eficienţă se aplică conceptele respective în logică şi cu ce limite? Se poate spune că ele sunt indispensabile logicii sau doar că sunt utile pe anumite porţiuni? Amatorul de logică şi filosofie a logicii recunoaşte importanţa acestor întrebări pentru înţelegerea actualelor raporturi metodologice dintre logică şi matematică. Dacă toate aceste concepte se dovedesc a nu fi necesare logicii înseamnă că atitudinea logicii faţă de ele este mai degrabă pragmatică decât teoretică. Cu alte cuvinte, sunt alese mijloacele cele mai convenabile urmărindu-se în special criterii legate de eficienţă. Dacă, în schimb, avem în vedere aplicaţiile logicii în matematică, atunci este de înţeles că aceste concepte sunt preferabile, uneori chiar indispensabile. În domenii nematematice, însă, abuzul de asemenea concepte poate duce la obscurităţi ceea ce justifică într-un fel aversiunea cercetătorului din domeniul respectiv faţă de metodele logice.

Rezolvă conceptele şi metodele matematice mai bine problemele logice sau rezolvă ele problemele care nu s-ar putea rezolva altfel? Legat de această întrebare nu trebuie să confundăm posibilitatea ilustrării anumitor concepte matematice pe terenul logicii cu eficienţa aplicării acestor concepte. Datorită caracterului mai simplu al aplicaţiilor lor, matematica poate obţine un anumit profit dar nu este sigur că şi logica ar putea avea un asemenea profit. Prin urmare, trebuie să distingem ceea ce este util matematicii de ceea ce este util logicii iar pe de altă parte ceea ce este necesar logicii de ceea ce este doar util ei.

1. COCEPTUL DE MULŢIME

Acest concept este de bază în matematică dar el este atât de general încât pare mai apropiat de statutul categoriilor filosofice decât al celor strict matematice. Numai dezvoltarea teoriei mulţimilor ne poate duce de la mulţime la matematică, mai precis la o disciplină specială a ei. Faptul că acest concept depăşeşte graniţele oricărui domeniu este arătat şi de dificultăţiile care apar în legătură cu el şi care depăşesc competenţele matematicianului ce lucrează în „interiorul" matematicii trecând dincolo, în logică şi chiar în filosofie. Aceste dificultăţi încep chiar de la definiţia conceptului de mulţime. În versiunea lui Cantor mulţimea este „rezultatul cuprinderii într-un tot a unor obiecte determinate ale perceperii sau gândirii noastre; aceste obiecte se numesc elementele mulţimii". Aplicată liber, definiţia duce la antinomii şI paradoxe, cum este (paradoxul lui Russell) legat de mulţimea tuturor mulţimilor ce nu se conţin pe sine. Din supoziţia că această mulţime se conţine rezultă că ea ar trebui să nu se conţină, şi invers.

Redefinirea conceptului de mulţime s-a făcut pe cale axiomatică în care sunt considerate (legitime) doar mulţimile ce satisfac anumite condiţii impuse prin axiome. Există în axiomatizările curente câteva axiome care s-au dovedit indispensabile matematicii.[1]

[1] O expunere deraliată a teoriei mulţimilor cu diferitele ei variante de axiomatizare cititorul poate găsi în tratatul prof. A. Albu recent apărut -

Axioma extensionalității: Două mulțimi A și B care au aceleași elemente sunt identice.

$A = B =_{df} \forall x\,(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

Axioma alegerii: Pentru orice mulțime A formată din mulțimi disjuncte două câte două, există o mulțime B care conține un singur element comun cu fiecare din mulțimile respective.

$\forall A\,(A = \{a_1, a_2, ...\} \;\&\; \forall_{i,j}\, a_i \cap a_j = \varnothing) \rightarrow \exists B\,(B = \{b_1, b_2, ...\} \;\&\; b_1 \in a_1 \;\&\; b_2 \in a_2 \;\&\; ...)$

Axioma infinitului: Există cel puțin o mulțime A astfel că:

a) $\varnothing \in A$,

b) Dacă $x \in A$ atunci $\{x\} \in A$.

Împreună cu *axioma mulțimii potențiale*, axioma infinitului determină șirul de mulțimi $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$,... prin care se poate constitui șirul numerelor naturale. Așa cum am spus în *INTRODUCERE*, axioma infinitului și axioma alegerii nu pot fi deduse din concepte și relații pur logice ceea ce înseamnă că o bună parte a matematicii tradiționale nu poate fi încorporată programului logicist de fundamentare a matematicii. Axiomele respective s-au dovedit indispensabile aritmeticii, analizei ca și unor aplicații ale matematicii cum ar fi mecanica teoretică, de exemplu.

Legat de mulțime trebuie discutat și conceptul de *clasă* deși cel mai adesea cele două concepte sunt luate ca echivalente. Se obișnuiește uneori ca mulțimea să fie considerată termen prim (colecție sau agregat de obiecte distincte între ele), iar clasa termen derivat. Este clasă acea mulțime de elemente care satisface o funcție propozițională. Pentru că încă nu am discutat conceptul de funcție propozițională putem spune mai simplu, că este clasă extensiunea asociată unui anumit concept. În alte contexte clasa poate primi accepțiuni mult mai speciale. La Bernays, de exemplu, sunt clase doar mulțimile care nu mai pot fi elemente ale altor mulțimi. Pentru simplificarea expunerii, în considerațiile ce urmează nu voi face nici o deosebire între mulțime și clasă indiferent care din termeni este folosit.

Introducere în fundamentele matematicii, Timișoara, Universitatea de Vest, 1995.

O clasă (mulțime) poate fi dată extensional (prin enumerarea elementelor sale) sau intensional (prin indicarea proprietății pe care o verifică elementele respective): $A = \{a_1, a_2, ..\}$ sau $A = \{x: F(x)\}$. Exprimarea intensională este preferabilă uneori, iar când avem de-a face cu mulțimi foarte mari (chiar infinite) ea este singura posibilă. Legătura dintre cele două forme de exprimare este dată de echivalența $\forall x\,(x \in A \Leftrightarrow A(x))$.

. . A nu se confunda logica claselor cu teoria mulțimilor. Prima este o teorie logică și are ca obiect validitatea anumitor scheme de raționare cu propoziții în care intervin clase; a doua este o teorie matematică a cărui obiect principal îl constituie definirea și constituirea unor obiecte strict matematice. Deși cele două se intersectează în zone destul de largi ele nu se confundă.

Aplicarea în logică a conceptelor teoriei mulțimilor nu trebuie înțeleasă în sensul reducerii logicii la un simplu caz particular al ei. De altfel, cea mai mare parte a teoriei mulțimilor s-a dovedit a nu fi necesară logicii, ceea ce se aplică aici sunt doar câteva dintre conceptele ei de bază. În principal ele vizează probleme referitoare la calcule, modele, domenii de interpretare, mulțimi de formule, clase de echivalență. Calculul matriceal, de exemplu, este asociat mulțimii {v, f}, iar calculul formelor normale este asociat mulțimii formulelor într-un limbaj simbolic. În primul caz avem de a face cu o mulțime la nivelul semanticii, în al doilea la nivelul sintacticii. Atât în semantică cât și în sintaxă exemplele pot continua. Pentru logica predicatelor domeniul de interpretare este o mulțime în plan semantic pe când alfabetul este o mulțime în sintaxă. Chiar și calcule mai speciale cum ar fi calculul axiomatic sau calculul natural sunt definite relativ la anumite mulțimi (mulțimi de formule de un anumit tip și mulțimimi de reguli de deducție). În legătură cu această problemă trebuie arătat că și unele sisteme logice cum este sistemul logicii propozițiilor pot fi considerate ca mulțimi pe care se definesc anumite operații și relații. Întrucât proprietățiile formale ale acestor operații și relații verifică axiomele unor cunoscute structuri matematice, sistemele în cauză pot fi studiate în termenii respectivelor structuri. Aplicația conceptului de mulțime devine, așadar, condiția aplicării conceptului de structură. În

Continuare voi exemplifica câteva concepte mai importante ale teoriei mulțimilor care pot fi întâlnite în logică.

1 ***Mulțimea potențială***. Fie A o mulțime oarecare. Mulțimea potențială notată P(A) se definește ca o mulțime a submulțimilor lui A. $P(A) = \{x: x \subset A\}$. Exemplificăm acest concept pe mulțimea valorilor logice V={v, f}

$P(V) = \{\varnothing, \{v\}, \{f\}, \{v, f\}\}$

2 ***Reuniunea și intersecția mulțimilor***. Dacă A, B sunt mulțimi, reuniunea respectiv intersecția notate cu $\cup$, $\cap$ se definesc astfel:

$A \cup B =_{df} \{x: x \in A \vee x \in B\}$

$A \cap B =_{df} \{x: x \in A \& x \in B\}$

Cele două operații se pot defini și pentru cazurile infinite când se folosesc notațiile „ $\cup_i A_i$“, „ $\cap_i A_i$“. Cu ajutorul celor două operații se pot da unele reformulări ale principiului terțului exclus și principiului noncontradicției:

$A \cup C(A) = U$

$A \cap C(A) = \varnothing$

unde C(A) este complementara mulțimii A (= mulțimea acelor elemente x care nu aparțin mulțimii A)

Operațiile mulțimiste $\cup$, $\cap$, -, (sau C) și operațiile logice &, v, - au proprietăți formale identice, ele determină algebrele booleene {A, $\cup$, $\cap$, -} respectiv {P, V, &, -}. Aceasta a și făcut ca în locul operațiilor logice &, V să se folosească simbolurile $\cup$, $\cap$. Notez ca o curiozitate faptul că L.Felix (24) definește operațiile mulțimiste $\cup$, $\cap$ după modelul funcțiilor de adevăr relativ la relația de apartenență ($\in$) și neapartenență ($\notin$):

A,B	A∩B
$\in \in$	$\in$
$\in \notin$	$\notin$
$\notin \in$	$\notin$
$\notin \notin$	$\notin$

A,B	A∪B
$\in \in$	$\in$
$\in \notin$	$\in$
$\notin \in$	$\in$
$\notin \notin$	$\notin$

Să luăm cazul mulțimii $A \cap B$. Prima linie din tabel indică faptul că apartenența la mulțimea $A \cap B$ este funcție de apartenența la mulțimea A și mulțimea B.

Este interesant că semnele $\cap$, $\cup$ au pătruns şi în logica predicatelor pentru cuantori: $\cup x.Fx$ şi $\cap x.Fx$. Aceasta se datorează analogiilor existente între disjuncţie (simbolizată prin $\cup$) şi cuantorul existenţial respectiv conjuncţia (simbolizată prin $\cap$) şi cuantorul universal.

3) ***Produs cartezian***. Fie din nou două mulţimi nevide A, B. Produsul cartezian A×B se defineşte prin:

$A \times B =_{df} \{<a, b>: a \in A \ \& \ b \in B\}$

Definiţia poate fi reformulată pentru cazul general:

$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n =_{df} \{<a_1, a_2, ..., a_n>: a_1 \in A_1 \ \& \ a_2 \in A_2 \ \& ... \& \ a_n \in A_n\}$

Elementele produsului cartezian $<a_1, a_2, ..., a_n>$ se numesc n-tuple. Pentru cazul particular în care n = 2 se foloseşte denumirea de *cuplu* sau *pereche ordonată*. Ordinea elementelor într-un cuplu este strictă. O notaţie curioasă a cuplului sau perechii ordonate apare la K.Kuratovski: $\{\{ a \},\{ a, b \}\}$. Pe lângă axiomele perechii ordonate această notaţie este importantă şi pentru că redă relaţia de ordine din perechea ordonată $< a,b >$ prin relaţia de ordine strictă $\{ a \} \subset \{ a, b \}$.

Relativ la produsele carteziene pot fi invocate următoarele cazuri mai importante de mulţimi:

a) mulţimile perechi (relativ la produsul A × B),

b) mulţimile puteri ($A^n = A \times A \times ... \times A$, de n ori),

c) produsele infinite ($\Pi A = A \times A \times ...$)

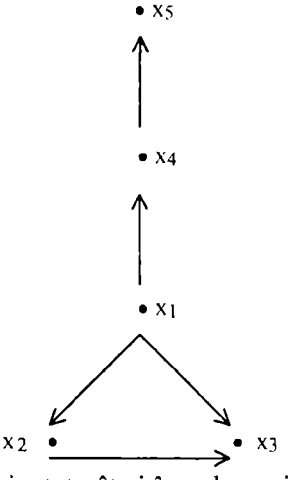
În logică putem forma produsul cartezian { v, f } x { v, f } = { vv, vf, fv, ff } ale cărui elemente intervin în definiţia matricială a funcţiilor de adevăr.

4) ***Graf***. În literatura de specialitate circulă astăzi două sensuri ale grafului: un sens slab de submulţime a produsului cartezian, şi un sens tare de asociere între element şi pereche respectiv între muchie şi vârfuri. Primul sens este presupus de al doilea care este, desigur, mult mai special.

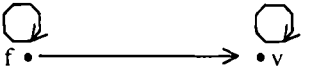
O tratare a funcţiilor de adevăr din perspectiva grafului este dată de M. Târnoveanu în cartea sa *Elemente de logică matematică* (Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1964). Graful este definit aici ca un sistem ordonat $G = \{\{a_i\}, \{\alpha_j\}\}$ astfel că elementului $a_i \in$

$\alpha_{ij}\}$ îi corespunde perechea $\alpha_{i1\ i2} \in \{\alpha_{ij}\}$ unde i = 1,2,... n şi j = 1,2,... m. Elementele a_i se mai numesc şi *vârfurile* sau *nodurile* grafului, iar perechile α_{ij} *muchiile* sale. Un graf G poate avea ca vârfuri mulţimea X = $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ iar ca muchii mulţimea de perechi X` = { < x_1, x_2 >, < x_1, x_3 >, < x_2, x_3 >, < x_1, x_4 >, < x_4, x_5 >}. Dacă într-un graf nu intervin perechi ordonate el este neorientat, iar dacă intervin, ca în exemplul de mai sus, el este orientat. Un triunghi, de exemplu, poate fi dat ca un graf neorientat în care vârfurile triunghiului sunt vârfurile grafului, iar laturile triunghiului sunt muchiile sale.

Un graf orientat, cum este cel exemplificat mai sus, se poate reprezenta în plan astfel:



Atât în graful orientat cât şi în cel neorientat legătura unui vârf cu el însuşi se numeşte *buclă*. Orice funcţie de adevăr poate fi definită printr-un astfel de graf orientat. Implicaţiei, de exemplu, îi corespunde graful:



în care v, f sunt vârfuri, iar (f f), (f v), (v v) sunt muchii. Sub formă de mulţime aceasta s-ar putea exprima prin:

$G_{\rightarrow}$ = { < (v v), v >, < (f v >, v >, < (f f), v > }

O interesantă exemplificare a grafului (în sensul definit mai sus) este *pătratul logic*. Aici raporturile logice de *subalternare*,

contradicţie, contrarietate şi *subcontrarietate* sunt vârfuri, iar perechiile de propoziţii sunt muchii. Subalternării, de exemplu, îi corespunde perechea ordonată <A,I> (sau <E,O>).

Spre deosebire de alte concepte mulţimiste care pot avea cel mult o exemplificare logică, produsul cartezian şI graful se dovedesc mult mai utile, în unele situaţii chiar indispensabile.

5) ***Echivalenţa mulţimilor şi clasele de echivalenţă***. Două mulţimi A şi B se numesc *echivalente* (*echipolente*, *echipotente* sau *egale*), dacă între elementele lor se poate stabili o relaţie de corespondenţă biunivocă. A nu se confunda echivalenţa sau egalitatea mulţimilor cu identitatea lor, mai ales că ambele relaţii se notează uneori cu „=".

Totalitatea mulţimilor care se află în relaţie de echivalenţă formează o *clasă de echivalenţă*. Clasa de echivalenţă asociată mulţimii A se notează cu // A // şi se defineşte prin // A // = { X : X ~ A } unde „~" este semnul pentru echivalenţă.

Din punct de vedere logic clasele de echivalenţă sunt importante pentru un tip special de definiţie şi anume definiţia prin abstracţie. O astfel de definiţie este definiţia numărului cardinal în matematică: numărul cardinal al unei mulţimi oarecare A este mulţimea tuturor mulţimilor echivalente cu mulţimea A. Se consideră numere naturale numerele cardinale cărora li se poate aplica inducţia matematică. Definiţia semnului este de asemenea o definiţie prin abstracţie (semnul este totalitatea inscripţiilor echivalente grafic).

6) ***Mulţimi şi concepte fuzzy***. Fie M o mulţime oarecare nevidă. În mod obişnuit, o mulţime se subordonează principiului terţului exclus întrucât despre orice element se poate spune precis dacă aparţine sau nu mulţimii: "$\forall x\ (x \in M \vee x \notin M)$." Aşa numitele *mulţimi fuzzy* nu satisfac această condiţie, altfel spus, nu pentru oricare element este adevărată disjuncţia „$x \in M \vee x \notin M$".

Relativ la mulţimile fuzzy, Gh. Enescu distinge între un *nucleu* şi o *margine*. Nucleul se compune din elementele certe ale mulţimii, iar cele pentru care apartenenţa este îndoielnică formează marginea. Conceptele asociate mulţimilor fuzzy se numesc, la rândul lor, *concepte fuzzy*. Ele fac obiectul unei discipline logice speciale, cunoscută astăzi sub numele de *logica fuzzy*. Elaborarea sistematică a

teoriei mulțimilor fuzzy, ca și a logicii fuzzy, a fost realizată de L.A.Zadeh (S.U.A., 1972).

Un exemplu clasic fuzzy este conceptul de „grămadă" legat de cunoscutul paradox megaric al grămezii.

Rămâne deschisă problema dacă, și în ce măsură, unele dintre conceptele de bază ale logicii cum este conceptul de adevăr, de exemplu, pot fi tratate în manieră fuzzy. Principalul impediment îl constituie faptul că nuanțările adevărului, deși merg destul de departe, se constituie într-o mulțime discretă pe câtă vreme logica fuzzy este o logică a continuului. Unele probleme apar și din direcția simbolismului care nu este folosit peste tot la fel. Simbolismul matematic obișnuit nu este soluția cea mai fericită deși la ora actuală el pare a domina cercetările din logica fuzzy.

2. FUNCȚIA - DE LA MATEMATICĂ LA LOGICĂ

Există în momentul de față o teorie a funcțiilor așa cum există și o teorie a mulțimilor, independentă de natura concretă a entităților la care ele se aplică. De altfel, conceptul de funcție este astăzi atât de general încât unii autori evită să-l mai lege de un domeniu anume. Ea este legată de cea mai abstractă relație și anume relația de corespondență care poate merge de la dependențe materiale la asocieri abstracte de elemente.

Este discutabil dacă conceptul de funcție presupune neapărat conceptul de mulțime sau dacă nu cumva acest concept este prim. Cel puțin în abordările curente, definiția fincției nu ne poate dispensa de orice idee de extensiune (a se vedea în acest sens și ideea de „totalitate" la Goldblatt). Raportul mulțime-funcție aminteşte apoi de tradiționala dispută extensiune-comprehensiune.

Nu-mi propun să fac o descriere detaliată a teoriei funcțiilor ci doar să reamintesc câteva aspecte mai importante. Se știe, astfel, că o funcție este caracterizată prin trei elemente: a)domeniu, b)codomeniu și c)regulile de corespondență. De regulă schema funcției se redă prin f : A $\rightarrow$ B sau A $\overset{f}{\rightarrow}$ B care se citește: „f aplică pe A în B" (sau „pe B"),

eventual „f duce de la A la B". Cuvintele „în" şi „pe" au rolul de-a indica faptul că în definiţia funcţiei intră numai o parte a mulţimii B sau mulţimea în întregul ei („în" nu îl exclude pe „pe").

Fie mulţimile A = {*a, b, c, d*} şi B = {*e, f*}. Convenim ca funcţia f definită pe A cu valori în B să fie definită de următoarele corespondenţe:

f(*a*) = e
f(*b*) = e
f(*c*) = f
f(*d*) = f

Aceste identităţi exprimă regulile de corespondenţă între elementele celor două mulţimi relativ la funcţia f. Este interesant de notat că relaţia de corespondenţă la nivelul funcţiei este redată prin relaţia de identitate la nivelul relaţiei funcţionale. Practic, îşi corespund acele elemente care transformă identitatea y = f(x) ($x \in A$ şi $f(x) \in B$) într-o propoziţie adevărată.

Singure, regulile de corespondenţă nu sunt în măsură să particularizeze o funcţie, altfel spus, să determine apartenenţa funcţiei la domeniul unei anumite ştiinţe, ceea ce face ca funcţia să iasă din cadrul ei abstract şi să primească o determinare concretă este tocmai precizarea elementelor la care ea se aplică (domeniul respectiv codomeniul funcţiei). Având în vedere că în logică pot fi întâlnite asemenea mulţimi de elemente, cum s-a văzut, este justificat să vorbim de funcţiile logice ca de un tip special de funcţie.

Definiţie. O funcţie $f:M^n \rightarrow V$, $n \geq 1$, şi unde V = {v, f} iar M este o mulţime oarecare nevidă (se precizează de fiecare dată care anume), se numeşte *funcţie logică.*

Cazurile particulare M = V şi $M \neq V$ corespund celor două specii de funcţii logice respectiv *funcţiilor de adevăr* şi *funcţiilor propoziţionale.*

Trebuie să deosebim când vorbim despre conceptul de funcţie în logică între funcţiile propriu-zis logice (cele definite mai sus) şi toate celelalte funcţii care pot să mai apară în logică, inclusiv cele matematice. Acestea din urmă sunt sporadice şi se folosesc mai mult în chestiuni de prezentare neesenţiale în principiu. De exemplu, formula de calculare a funcţiilor de adevăr se exprimă printr-o funcţie

matematică, $N = 2^{m^n}$, unde m reprezintă numărul variabilelor iar numărul valorilor logice. Un exemplu şi mai interesant îl ofer A.Church relativ la semantica lui Frege. Relaţia dintre semnificaţ numelui N şi sensul acestuia este redată de A.Church în formă c funcţie: Semnificaţie $_N$ = f (sensul $_N$) adică „semnificaţia numelui N este funcţie de sensul lui N".

Între mulţimea propoziţiilor P şi mulţimea valorilor logic {v,f} se poate defini funcţia f: P → {v, f} astfel că $\forall p \in P$, f(p) = v sa f(p) = f. Această funcţie este cunoscută în logică sub numele c *evaluare*. La fel *interpretarea*, concept logic de maximă importanţ poate fi dată sub forma unei funcţii ce stabileşte corespondenţele înt simbolurile unui limbaj L şi domeniul în care acesta urmează a interpretat.

Toate aceste funcţii, la care se mai pot adăuga încă multe alte nu sunt funcţii strict logice, ci doar exemplificări şi aplicaţii de care n putem la nevoie dispensa. Funcţiile propriu-zis logice sunt funcţiile p care le-am definit mai sus şi pe care vreau să le discut pe scurt în ce ce urmează.

1) ***Funcţiile de adevăr***. Să luăm pentru exemplificare cazul ur funcţii de adevăr, să zicem implicaţia, definită prin matricea:

P,Q	P→Q
v v	v
v f	f
f v	v
f f	v

Care este drumul de la funcţia „P → Q" la propozi implicativă formulată prin „dacă... atunci..."? În primul rând trebu spus că această funcţie postulează anumite corespondenţe în elementele mulţimii {*v v, v f, f v, f f*} şi elementele mulţimii {v, f}:

v v — *v*
v f — *f*
f v — *v*
f f — *v*

Aceste corespondenţe nu sunt arbitrare, ele provin din aplicarea unor reguli de adevăr specifice propoziţiei implicative cum ar fi: a) dacă antecedentul este adevărat şi consecventul adevărat, implicaţia este adevărată ş.a.m.d. Regulile în cauză au fost cunoscute de antici ca şi de medievali însă redarea lor ca reguli de corespondenţă într-o funcţie a fost realizată de logica modernă. În formă simbolică, aceste reguli pot fi formulate după cum urmează:

$(v \rightarrow v) = v$

$(v \rightarrow f) = f$

$(f \rightarrow v) = v$

$(f \rightarrow f) = v$

Din analiza acestui exemplu ne putem da seama că funcţiile de adevăr stabilesc anumite „distribuţii" ale valorilor v,f în structura propoziţiilor compuse astfel că plecând de la valoarea propoziţiilor componente putem determina într-un mod univoc valoarea propoziţiei compuse. Fiecare propoziţie compusă cu ajutorul cuvintelor de legătură „non", „şi", „sau", „implică", „echivalent" îşi asociază, aşadar, o anumită funcţie de adevăr.

În continuare voi enumera câteva aspecte din perspectiva cărora să putem aprecia valoarea pe care o prezintă pentru logică conceptul de funcţie de adevăr. Aceste funcţii permit:

a) introducerea conceptelor de *tautologie*, *contradicţie* şi *realizabilitate* care sunt de bază în logică. O funcţie de adevăr f (p, q,...) este tautologie dacă ia valoarea v pentru orice valoare posibilă a argumentelor sale. Este contradicţie dacă ia numai valoarea f şi este realizabilă dacă pentru unele valori ale argumentelor ia valoarea v, iar pentru altele valoarea f. În loc de „tautologie" se mai foloseşte astăzi termenul de „expresie identic adevărată" sau de „lege logică". Ca orice ştiinţă logica este interesată de descoperirea de „legi logice", în speţă de „legi de raţionare". Ele guvernează în diferite moduri validitatea schemelor noastre de inferenţă.

b) Funcţiile de adevăr permit studierea într-o formă exactă, matematică, a principalelor proprietăţi formale ale operatorilor logici. Nici în discuţiile anticilor despre propoziţiile condiţionale, şi nici în reluările medievalilor, această problemă nu a putut fi dusă până la

capăt. Numai logica simbolică a dat soluția satisfăcătoare prin aplicarea conceptului de funcție.

c.) Definițiile matriciale ale funcțiilor de adevăr exprimă anumite reguli de deducție în raport cu expresiile corespunzătoare lor. Pentru conjuncție, de exemplu, aceste reguli arată astfel:

$$\frac{P.Q}{P} \qquad \frac{P.Q}{Q} \qquad \frac{P,Q}{P.Q}$$

Aceasta înseamnă:

Din (P . Q) = v se deduce P = v
Din (P . Q) = v se deduce Q = v
Din P = Q = v se deduce (P . Q) = v

d) După modelul funcțiilor de adevăr în logica bivalentă se pot defini diferite funcții în sistemele polivalente sau în sistemele de adevăr. Łukasiewicz, de exemplu, construiește sistemul său tetravalent plecând de la definițiile operatoriilor în logica bivalentă. În locul valorilor v, f el ia ca valori ale variabilelor propoziționale cele patru combinații de valori din matriciile bivalente, respectiv v v, v f... f f. Implicația „v f → f f", să zicem, se calculează după regulile obișnuite „v → f" și „f → f" ceea ce dă f v. În felul acesta Lucasiewicz construiește un nou concept de implicație definit prin matricea:

⇒	v v	v f	f v	f f
v v	v v	v f	f v	f f
v f	v v	v v	f v	f v
f v	v v	v f	v v	v f
f f	v v	v v	v v	v v

Deși implicația „⇒" se definește prin implicația bivalentă „→", proprietățile ei sunt în multe privințe diferite de proprietățile acesteia.

e) Funcțiile de adevăr au permis rezolvarea unor importante probleme ale logicii tradiționale, însă nu trebuie uitat, totuși, că cele mai multe

din problemele la care ele se aplică ţin exclusiv de logica simbolică (problema deciziei, dualităţii, minimizarea expresiilor, transcrierea operatorilor dintr-o bază în alta şi multe altele).

Tabloul general al funcţiilor de adevăr nu se poate considera încheiat fără enumerarea câtorva particularităţi prin care aceste funcţii îşi dovedesc caracterul lor limitat în logică. Am în vedere două categorii mari de limite. În primul rând trebuie spus că atât în logica bivalentă cât şi în logica polivalentă apar funcţii ce nu pot fi interpretate corespunzător cum este cazul funcţiei de mai jos:

P,Q	X(P,Q)
v v	v
v f	f
f v	v
f f	f

Această funcţie postulează reguli de adevăr care nu corespund practic nici unei propoziţii compuse. Este inutil să mai insist că aceste funcţii au doar aplicaţii abstracte (pur calculatorii) fără o interpretare corespunzătoare în plan logic. Dar chiar şi la funcţiile interpretabile regulile de adevăr pot conduce la situaţii bizare. În cazul conjuncţiei, de exemplu, regula (v • v) = v justifică propoziţia „2 + 2 = 4 şi Bucureştiul este capitala României". Este această propoziţie adevărată? Strict vorbind ea nu contravine regulii de adevăr, totuşi, în vorbirea curentă rar se întâmplă să asertăm asemenea propoziţii. Lucrurile se complică considerabil când trecem la propoziţiile implicative. În general se consideră paradoxală o propoziţie de forma „dacă 2 + 2 = 5 atunci toate mamiferele sunt vertebrate". Acest aşa-zis paradox poate fi apreciat din două puncte de vedere. Întâi, pentru că între propoziţia „2 + 2 = 5" şi propoziţia „toate mamiferele sunt vertebrate" nu există nici un raport implicativ, ele sunt independente din punct de vedere al conţinutului (sensului). Apoi, pentru că se consideră adevărată implicaţia in care antecedentul este fals şi

consecventul este adevărat. Desigur, al doilea sens este mai special şi reclamă o discuţi mai amplă asupra a ceea ce se cheamă astăzi „paradoxele impli ei materiale", Primul însă, este destul de comun şi caracterizează etic toate funcţiile de adevăr. Excepţie face negaţia pentru că e aplică unei singure propoziţii şi deci nu există riscul asocierii un conţinuturi diferite. În cartea sa *Teoria sistemelor logice* (20; 343) C inescu încearcă să rezolve problema introducând o nouă nuanţă de văr pentru astfel de construcţii logice - veridicul. Rămâne de văut ce măsură acest concept poate fi asimilat unui calcul logic şi ă logica polivalentă poate „absorbi" această problemă a logici bivalente. Ce pot spune deocamdată este că principala limită a funcţiilor de adevăr se datorează faptului că nu întotdeauna logic sensurilor este în consonanţă cu logica semnificaţiilor.

2) ***Funcţii propoziţionale***. În *Principia Mathematica* funcţia propoziţională este definită drept o „expresie Φx care conţine o variabilă x astfel că ea devine o propoziţie când pentru x este dată o semnificaţie determinată" (72; 11). Se adoptă relativ la funcţia propoziţională următorul sistem de notaţii:

$\hat{\Phi x}$ - funcţia propoziţională. Expresiile $\hat{\Phi x}$, $\hat{\Phi y}$, $\hat{\Phi z}$,...semnifică una şi aceeaşi funcţie.

Φx, Φy,... valori ambigue ale funcţiei.

Φ*a*, Φ*b*,... valori determinate ale ei.

Conceptul de funcţie propoziţională introdus în PM nu este tocmai clar dat fiind că una şi aceeaşi funcţie este desemnată prin mai multe expresii. Aceasta poate duce la complicaţii mai ales în raport cu regulile de calcul. Din acest punct de vedere, cel puţin, definiţia lui Frege este mult mai clară din păcate, însă, ea nu este susţinută şi de un simbolism corespunzător.

Să considerăm pentru exemplificare funcţia „x este par" sau, în exprimarea uzuală, „Par(x)". Pentru valorile 1, 2, 3,... ale variabilei funcţia se transformă succesiv în propoziţiile „1 este par", „2 este par", „3 este par" etc. Am putea spune că o asemenea funcţie realizează corespondenţa între mulţimea numerelor naturale N şi o mulţime de propoziţii P. Mulţimea acelor elemente pentru care funcţia

propoiţională devine adevărată sau falsă reprezintă domeniul acelei funcţii. Întrucât nu contează propoziţiile ca atare, ci doar valoarea lor logică, vom spune că funcţia în cauză realizează corespondenţa între mulţimea numerelor naturale N şi mulţimea valorilor logice {v, f}. Avem, aşadar, o funcţie de tip N → {v, f} care nu este altceva decât un caz particular faţă de definiţia conceptului general de funcţie logică.

Următorul tabel pune în evidenţă elementele caracteristice ale funcţiei Par(x) precum şi corespondenţele pe care ea le stabileşte între cele două mulţimi menţionate mai sus.

x	1,	2,	3, ...	Domeniul
Par (x)	Par ( )			Funcţia
Par (n)	Par (1),	Par (2),	Par (3), ...	Propoziţia
/Par (n)/	f,	v,	f	Codomeniul

În acest tabel Par ( ) este funcţia ca atare, iar Par (x) este *numele* funcţiei ca să păstrez terminologia lui Frege. „Par (n)" este valoarea nedeterminată a funcţiei în timp ce „Par (1)", „Par (2)", etc. sunt valorile ei determinate. Cu „/Par(n)/" am notat valoarea logică a propoziţiei „n este par". Corespondenţele realizate prin această funcţie ar putea fi date sub formă de graf: {< 1, f >, < 2, v >, < 3, f >,...}.

Expresiile $x \times y$, $2x + 3 = 6$, $x^2 - 2 = 18$ sunt exemple de funcţii propoziţionale în matematică întrucât ele devin propoziţii adevărate (sau false) pentru diferitele valori ale variabilei x. Foarte multe concepte şi relaţii matematice pot fi tratate ca funcţii propoziţionale, ceea ce justifică interesul pe care matematica îl manifestă pentru acest concept logic. Există în momentul de faţă procedee foarte elaborate ale marematicii care permit determinarea acelor valori ale variabilelor pentru care funcţia devine propoziţie adevărată. Nu acelaşi lucru se poate spune despre logică şi aici găsesc una din principalele deosebiri dintre cele două ştiinţe relativ la conceptul de funcţie. Din punct de vedere logic este suficient să se ştie că există asemenea valori pentru care funcţia devine propoziţie adevărată sau care *satisfac* funcţia. Dacă o funcţie F(x) este satisfăcută de orice valoare a variabilei sale libere într-un domeniu D, spunem că ea este ***adevărată în D***. Dacă, în

schimb, funcția este satisfăcută pentru orice valoare, în orice domeniu, atunci ea este *universal adevărată*. Cu ajutorul cuantorilor aceste idei pot fi reformulate după cum urmează:

a) $\exists x\ F(x)$, adică „există cel puțin un element într-un domeniu anume pentru care funcția este adevărată.

b) $\forall x\ F(x)$ - „pentru orice element x al domeniului este adevărat F(x)".

c) $\sim(\exists x)\ F(x)$, sau "$x \sim F(x)$ - „nu există nici un element x astfel că F(x) să fie adevărată", sau „oricare ar fi x, F(x) este falsă".

Chiar și din aceste sumare considerații ne putem da seama că ceea ce au comun funcțiile propoziționale cu cele strict matematice este doar ideea de corespondență, sub toate celelalte aspecte ele sunt diferite. Abordarea logică este mult mai generală față de cea matematică după cum se poate ușor observa. Specificitatea funcției logice este dată apoi de natura entităților la care ele se aplică și de tipul operațiilor cu care sunt compatibile. În funcțiile matematice cele mai uzitate avem de-a face cu operațiile care duc de la funcție la număr, față de cele logice în care operațiile duc la propoziții. Deosebirea mi se pare esențială. Este drept că în *Principia Matematica* tipul fundamental de funcție este funcția propozițională care subsumează într-un fel și funcția matematică. Funcții cum ar fi sin x, x^2, log x, etc. sunt considerate aici *funcții descriptive* pentru că ele conțin o descripție în general „acel x care este cutare și cutare" (acel număr y care este pătratul lui x). Acest concept de funcție descriptivă nu s-a impus în practica matematică curentă și chiar în literatura logică el este destul de sporadic.

O unificare (formală) a funcțiilor logice cu cele matematice se face în teoria funcțiilor recursive (Gödel, Kleene s.a.). Această unificare s-a lovit de caracterul refractar la abordarea recursivă a conceptului logic funcțional „x este demonstrabil" dovedit de marea teoremă a lui Gödel. Ea este numai una dintre dovezi că între „modelul logic" și „modelul mulțimist - matematic" chiar înrudirea structurală nu merge foarte departe. Sigur, însă, nimeni nu știe din principiu cât de departe se poate ajunge.

3)***Conceptul de funcție în logica combinatorică și calculul lambda conversiunii***. Începând cu primele decenii ale acestui secol, o serie de

autori au atras atenţia asupra unor ambiguităţi legate de utilizarea termenului „funcţie". Notaţia uzată "f(x)" se arată în primul volum din *Combinatory logic* (16; 81), nu distinge suficient de clar între funcţia însăşi şi valoarea funcţiei pentru o valoare nedeterminată a argumentului. Acest neajuns devine stânjenitor mai ales în teoriile care folosesc operaţii funcţionale adică funcţii ce admit alte funcţii ca argumente. Soluţia va veni din partea calculului lambda conversiunii elaborat de A. Church începând cu anul 1932. Varianta definitivă a acestui calcul este dată de A. Church în lucrarea sa *The calculi of lambda - conversion* (Princeton, 1941).

Noutatea soluţiei propusă de Church constă în sistemul de notaţii imaginat de el care pune în evidenţă relaţia de corespondenţă dintre valoarea nedeterminată a argumentului x şi valoarea funcţiei pentru acest argument. Altfel spus, dacă M este o expresie care îl conţine pe x şi care indică valoarea funcţiei pentru acest argument, funcţia însăşi se va nota cu $\lambda x.M$. De exemplu, $\lambda x.x^2$ este funcţia pătrat, λx sin x este funcţia sin, şi aşa mai departe. O funcţie de mai multe argumente se va nota cu $\lambda x_1,...,x_n.M$. Expresia $\lambda x.M$ se mai numeşte şi *abstracţie funcţională.*

Fie o funcţie f definită prin $\lambda x.M$. Aplicaţiile funcţiei de tip *fa* se calculează după regula:

$$fa = [x/a]\ M$$

unde $[x/a]$ înseamnă „substituţia lui x cu *a* în M". Axioma extensionalităţii se reformulează pentru funcţii în felul următor:

Dacă $fx_1...x_n = f'x_1...x_n$, atunci $f = f'$. (Ext)

Cu ajutorul abstracţiei funcţionale $\lambda x.M$ se defineşte mai departe conceptul de *combinator* şi *regulă de reducţie.*

Definiţia 1. O funcţie $\mathcal{U}$ se numeşte combinator dacă $\mathcal{U} = \lambda x_1...x_n.M$ şi M nu conţine alte variabile decât cele care apar în prefixul formulei, respectiv $x_1,x_2,...,x_n$.

Definiţia 2. Dacă $\mathcal{U}$ definită prin $\lambda x_1...x_n.M$, este un combinator atunci $\mathcal{U}\ x_1...x_n = M$ este regula de reducţie asociată lui.

Iată şi câţiva dintre combinatorii mai importanţi studiaţi de logica combinatorică împreună cu regulile de reducţie asociate lor:

a) Identificatorul elementelor: $I = \lambda x.x$, şi $Ix = x$.

b) Compozitorul: B = λxyz.x(yz), şi Bxyz = x(yz).
c) Eliminatorul: K = λxy.x, şi Kxy = x.
d) Combinatorul formalizării: S = λxyz.xz(yz), şi Sxzy = xz(yz).

Combinatori mai speciali cum ar fi C, W, F, Y, ş.a. se definesc în aceeaşi manieră. Unii dintre ei au proprietatea că îi pot transcrie pe toţi ceilalţi. De exemplu, combinatorul B se poate transcrie prin (S) şi (K):

$$\begin{aligned} Bxyz &= x(yz) && \text{(Def.)} \\ &= Kxz(yz) && \text{(K)} \\ &= S(Kx)yz && \text{(S)} \\ &= KSx(Kx)yz && \text{(K)} \\ &= S(KS)Kxyz && \text{(S)} \\ B &= S(KS)K && \text{(Ext.)} \end{aligned}$$

În aplicaţiile matematice uzuale aceşti combinatori conduc la expresii în care nu mai apar variabile. Eliminarea variabilelor este aici doar teoretică pentru că în practica matematică curentă ele se dovedesc indispensabile. Există multe alte elemente de noutate legate de aplicaţiile acestor combinatori care i-au determinat pe H.B.Curry şi R.Feys, autorii primului volum din *Combinatory logic*, să afirme că logica combinatorică vizează nu doar fundamentele logicii şi matematicii, dar chiar „ultimele lor fundamente".

3. LOGICA MODERNĂ ŞI CONCEPTUL MATEMATIC DE NUMĂR[1)]

Cu toate restructurările realizate de matematică, numărul rămâne până în momentul de faţă unul dintre conceptele ei fundamentale. După mulţi autori el ţine în continuare de specificul matematicii aşa cum conceptul de specie, să zicem, ţine de specificul biologiei. Afirmaţia lui Poincaré potrivit căreia „trebuie să căutăm gândirea matematică acolo unde ea a rămas pură, adică în aritmetică" (56; 7), nu şi-a pierdut cu nimic din actualitate. Este adevărat că

---

1) Acest paragraf reproduce cu unele modificări studiul meu cu acelaşi titlu din Analele Univ. Timişoara, vol. I -II, 1989 - 1990.

dezvoltarea structuralistă a matematicii estompează întrucâtva ideea de număr, însă, parafrazându-l pe Aristotel am putea spune că dacă numerele nu ar exista ar fi imposibil pentru orice alt lucru (matematic) să existe! Într-un studiu din Bourbaki tradus şi în limba română se arată că cele mai importante din structurile matematice îşi trădează originea prin faptul că păstrează anumite „urme" ale domeniilor din care au fost extrase. Aceste „urme" se referă, între altele, la numere,operaţii cu numere şi la proprietăţile formale ale acestora.

Nici încercările lui Frege şi Russell de a defini numărul prin conceptele de *mulţime* şi *relaţe de corespondenţă* nu schimbăîn mod esenţial lucrurile. Aceasta pentru că definiţia Frege - Russell nu duce la o idee mai generală de număr aşa cum s-a întâmplat, în alt plan, cu conceptele de funcţie şi structură, ci pur şi simplu o precizează. Evident, ideea că numărul este „totalitate de mulţimi echivalente" schimbă optica asupra conceptului de număr şi operaţie cu numere forţând într-un fel intuiţia noastră obişnuită. Din caracteristică a mulţimii numărul devine acum un caz particular de mulţime ceea ce, trebuie să recunoaştem, contravine utilizărilor obişnuite. Spiritul logic a acţionat aici împotriva intuiţiei matematice obişnuite.

Dacă numărul rămâne un concept fundamental pentru matematică se pune în mod firesc întrebarea care sunt aplicaţiile logice ale acestui concept? Se înscriu aplicaţiile respective pe linia aplicaţiilor din celelalte ştiinţe sau ele prezintă un specific aparte? În sfârşit, pot fi asimilate conceptele de bază ale logicii unor concepte cantitativiste aşa cum se întâmplă în celelalte ştiinţe? Iată câteva din întrebările pe care vreau să le discut pe scurt în cele ce urmează.

1) ***Concepte logice şi concepte numerice***. Exceptând anumite categorii şi predicate numerice cum ar fi numărabil - nenumărabil, finit - infinit, actual - potenţial, se poate spune că logica este totuşi refractară la aplicaţiile conceptului de număr. Relaţiile logice nu pot fi determinate cantitativ aşa cum se întâmplă în mai toate disciplinele ştinţifice care aplică conceptul de număr. Nu întâmplător logicianul american E.C.Berkeley (3) afirmă că deosebirea fundamentală dintre logică şi matematică este deosebirea dintre calitate şi cantitate.

După Carnap exprimarea cantității și a raporturilor cantitative se realizează printr-un tip special de concepte care pot fi asociate unor valori numerice. În *Logical foundations of probability* (Chicago, 1962), el împarte conceptele în trei mari categorii: a)concepte clasificatorii, b)concepte comparative (sau topologice) și c)concepte numerice (sau cantitative). Cele trei categorii de concepte diferă prin gradul lor de exactitate și prin rolul diferit pe care îl au în procesul logic al explicării. La Carnap sarcina explicării constă în „transformarea unui concept mai mult sau mai puțin exact și, mai mult decât atât, în înlocuirea primului cu al doilea." (11; 3).

1. Conceptele clasificării sunt cele care servesc la clasificarea lucrurilor în două sau mai multe clase disjuncte între ele. Cel mai adesea ele apar în postura de predicat sau subiect logic în propoziție. Conceptul „metal", de exemplu, împarte universul de discurs în clasa metalelor și a nemetalelor. 2. La rândul lor conceptele comparative se folosesc pentru exprimarea rezultatelor unei comparații. Ele implică întotdeauna o relație de ordine tare (de ex. „mai cald ca", „mai ușor decât", ș.a.). 3. În sfârșit conceptele numerice sau cantitative sunt cele care ajută la caracterizarea lucrurilor sau a unor trăsături ale lor prin asocierea de valori numerice. Concepte cum ar fi „timp", „volum", „forță", „temperatură" sunt exemple de concepte numerice. Acest tip de concepte este frecvent întâlnit în știință tocmai pentru că sunt mai exacte decât toate celelalte. Conceptul numeric „temperatură", de exemplu, poate fi luat ca explicant pentru conceptele de „cald" sau „rece" întâlnite în vorbirea comună. Acestea din urmă sunt inoperante în știință datorită gradului mare de imprecizie și subiectivitate pe care îl implică. Așa de exemplu, propoziția de observație „A este mai cald (sau mai rece) decât B", valabilă pentru subiectul X în momentul t poate să înceteze a mai fi valabilă într-un moment t' ulterior datorită faptului că starea organismului s-a schimbat de la t la t'. De asemenea, ceea ce este valabil pentru X la un moment dat s-ar putea să nu fie valabil și pentru Y. În schimb, dacă A are temperatura de n°C iar B de m°C, propoziția „temperatura lui A este mai mare (sau mai mică) decât a lui B" nu numai că este exactă dar este și intersubiectiv testabilă.

Nu se poate spune că în logică avem de-a face cu asemenea situaţii în ciuda faptului că cele două concepte fundamentale ale logicii, adevărul respectiv falsul, sunt adeseori notate cu simboluri numerice. După cum am mai spus până acum, aceste simboluri vizează cu prioritate limbajul (sistemul de semne) şi nu conceptul ca atare. În unele sisteme polivalente s-ar putea explica totuşi propoziţia „P este mai adevărat decât Q" prin perechea de propoziţii „P are valoarea 2/3" şi „Q are valoarea 1/3" unde 2/3 şi 1/3 sunt, aşa cum am spus, simboluri numerice menite să introducă anumite nuanţe între adevăr şi fals. Există o mare deosebire faţă de situaţia exemplificată mai sus după Carnap datorită faptului că aici apar numere abstracte (luate ca valori logice) pe câtă vreme în celelalte ştiinţe se lucrează cu numere concrete (36 °C, 25g, 15cm, etc.). Or, adevărul, respectiv falsul, nu se exprimă printr-un etalon aşa cum lungimea se exprimă în metri, masa în grame, forţa în newtoni şi aşa mai departe. Simbolurile 1, 2/3, 1/3, 0 nu au o semnificaţie logică proprie ci numai printr-o interpretare corespunzătoare când devin simboluri pentru un anumit conţinut logic. Impresia că cele două concepte logice (adevărul şi falsul) ar fi concepte numerice (sau cantitative) născută din ideea simbolizării lor prin cifre, reprezintă una din principalele neînţelegeri ale actualelor aplicaţii cu caracter aritmetic în logică.

Există totuşi anumite situaţii în care evaluările cantitativiste pot prezenta un interes pentru logică. Pentru exemplificare voi lua un caz la întâmplare. În cartea sa *Aristotele's syllogistic from the standpoint of modern formal logic* (Oxford, 1957), Lukasiewicz reproduce următoarele relaţii între principalele categorii silogistice (termeni, moduri, figuri):

Numărul termenilor	n
Numărul figurilor	2^{n-1}
Nr. fig. cu moduri valide	$1/2\ (n^2 - n + 2)$
Nr. moduri valide	$n(3n - 1)$

Este de presupus că în toate disciplinele logicii pot fi stabilite astfel de raporturi cantitative însă ele nu se dovedesc esenţiale pentru că de îndată ce natura obiectelor este precizată numărul îşi încetează rolul. Natura inferenţei silogistice nu este în nici un fel dependentă de faptul că dacă există 4 termeni, să zicem, vor exista implicit 44 de moduri

valide. Ceea ce se realizează este doar o delimitare mai exactă a obiectului cercetat şi nimic mai mult. Aplicaţiile logice ale conceptului de număr sunt aşadar destinate rezolvării unui cu totul alt gen de probleme decât cele de ordin cantitativ.

Numere şi cuantificare. Având în vedere că logica lucrează cu intensiuni şi extensiuni (proprietăţi şi clase),unii dintre criticii logicismului au avansat ideea că logica ar presupune ideea de număr. Pretenţia de a defini numărul prin concepte logice ar avea de înfruntat pe lângă obiecţiile formulate la început, şi pericolul circularităţii. Acest lucru devine vizibil în cazul cuantorilor. Dacă la cuantorul universal este suficientă ideea de clasă, cuantorul particular presupune şi ideea de număr căci el înseamnă „există cel puţin *un*" sau „există *un singur*". Acest „un" respectiv „un singur" nu este străin de *unu* din aritmetică, chiar dacă nu îl anunţă explicit.

Dacă cuantorul universal este cât de cât precis (el vizează clasa ca întreg), cuantorul existenţial este, dimpotrivă, imprecis. Spunând că „există cel puţin un" noi lăsăm deschisă problema dacă e vorba despre un singur individ, de mai mulţi sau chiar de toţi. Acest lucru se explică prin echivalenţa:

$\exists xFx =_{df} Fa_1 \vee Fa_2 \vee \ldots$

Nevoia de-a elimina imprecizia în raport cu cuantorul existenţial a condus în ultima instanţă la introducerea cuantorilor numerici. Prima şi cea mai simplă cuantificare numerică este dată de expresia „$\exists!$ xFx" care se citeşte „există numai un singur individ x astfel că F de x". Evident procedeul poate fi extins la n indivizi (n ł 2). Este interesant, însă, că şi un cuantor numeric cum ar fi „$\exists!$ 2x" poate fi definit prin cei doi cuantori de bază:

$\exists!\ 2x(Fx) = df\ \exists x\ \exists y(Fx \bullet Fy \bullet \forall z(Fz \rightarrow (z = x \vee z = y)))$

Un interes special prezintă cuantorii nuanţaţi de tipul „există numai un x astfel că..." sau „există cel puţin un x...". Pot interveni apoi nuanţări care nu invocă neapărat un concept numeric cum ar fi „cei mai mulţi x...", „majoritatea elementelor x...", ş.a.

Chiar dacă cuantificarea numerică aduce unele avantaje acestea sunt totuşi limitate pentru că a) se pierd o serie de legi logice cum ar fi legile lui de Morgan, indispensabile unei teorii satisfăcătoare a deducţiei, b) în unele situaţii impreciziile cuantorilor $\forall$, $\exists$ reapar la

nivelul cuantorilor numerici, cu excepția unor sectoare restrânse ale logicii aceşti cuantori nu se dovedesc a fi de interes general. În plus, ei sunt greu de mânuit în calcul. La aceasta se mai adaugă faptul că în cele mai multe cazuri cuantorii numerici se pot defini prin cuantorii de bază, cum s-a văzut deja.

3) ***Cardinalitate şi decizie.*** Operaţia de cuantificare este relativă la domeniu (= mulţimea pe care sunt definite predicatele), motiv pentru care determinările numerice la nivelul cuantorilor sunt în strictă dependenţă de determinările numerice ale mulţimii domeniu. Numai că, în timp ce la nivelul cuantorilor intervine ideea de număr natural, la nivelul domeniilor intervine ideea de cardinalitate sau de număr cardinal. Reamintesc că numerele naturale sunt numerele cardinale cărora li se aplică principiul inducţiei matematice. Desigur că dezvoltarea celor două concepte urmează căi şi forme diferite în aritmetică şi teoria mulţimilor.

Aplicaţiile în logica predicatelor ale conceptului de număr cardinal sunt legate în principal de problema deciziei. După cum se ştie, această disciplină logică nu este decidabilă în sensul că nu există procedee generale prin care să se poată recunoaşte în mod univoc starea logică a formulelor. Problema deciziei se „despică" aici într-o serie de cazuri particulare cele mai multe dintre ele fiind date de un anumit tip de cardinalitate a domeniului. Există, deci, o relaţie directă între starea logică a unei formule şi cardinalitatea domeniului. „Făcând abstracţie de acele formule care sunt universal valide - arată Ackermann - şi de cele care nu au această proprietate în nici un domeniu, asertarea validităţii (sau realizabilităţii) unei formule este echivalentă cu un anumit enunţ despre numărul cardinal al domeniului". (1; 22). Dealtfel, conceptul de număr cardinal intervine chiar în anumite formulări ale problemei deciziei. După Ackermann (1), a decide înseamnă:

a) A decide pentru orice formulă dacă este validă sau nu.

b) A decide pentru orice formulă dacă este universal validă. Dacă nu este astfel, a decide dacă nu este validă în nici un domeniu sau dacă este validă numai în unele domenii. În acest ultim caz trebuie determinat ***numărul cardinal*** al domeniilor pentru care ea este validă.

A decide pentru orice formulă dacă este sau nu validă în toate domeniile cu un *număr finit* de elemente.

A.Church, A.Turing, ş.a. au demonstrat imposibilitatea soluţiei pentru problema deciziei în formularea a) şi b), iar B.A.Trachtenbrod în formularea c).

Redau mai jos câteva din teoremele logicii predicatelor care determină starea logică a formulelor numai în baza cardinalităţii domeniului.

Teorema 1. Dacă o formulă din logica predicatelor care conţine predicate de o singură variabilă este realizabilă într-un domeniu M, atunci ea este realizabilă şi într-un domeniu M' ce conţine cel mult 2^n elemente (n este numărul predicatelor din formulă).

Teorema 2. Dacă o formulă în logica predicatelor ce conţine predicate de o singură variabilă este adevărată, pentru orice domeniu format din 2^n elemente, unde n este numărul predicatelor din formulă, atunci formula este identic adevărată.

Teorema 3. Dacă o formulă este realizabilă într-o mulţime infinită atuncea este realizabilă într-o mulţime numărabilă (teorema lui Löwenheim).

Teorema 4. Dacă o formulă care nu conţine variabile individuale libere dar care poate conţine constante individuale este realizabilă într-un domeniu oarecare, atunci ea este realizabilă într-un domeniu finit sau numărabil (teorema lui Löwenheim).

În toate situaţiile descrise de aceste teoreme apare atât conceptul de număr cardinal cât şi categoriile numerice de finit, infinit şi numărabil. Dacă domeniile sunt mulţimi finite atunci numărul de elemente poate fi specificat sau nu. O serie de teoreme atestă starea logică a formulelor în domenii vide. Ne dăm seama, aşadar, că în logica predicatelor conceptul de număr intervine foarte frecvent în formularea şi rezolvarea problemei deciziei care, aşa cum se ştie, este problema fundamentală a logicii.

Cardinalitate, polivalenţă şi modalitate. Am arătat în primul capitol că cele mai importante sisteme polivalente şi modale pot fi exprimate într-un limbaj aritmetic în care mulţimea valorilor logice este reprezentată prin diferite mulţimi de numere. Pornind de la asemenea reprezentări aritmetice s-a reuşit generalizarea sistemelor

respective pe domenii cu valori infinite. Vorbim astfel de „familii de sisteme" de tip Lukasiewicz, Bocivar, Kleene, Post, ş.a. Să luăm pentru exemplificare sistemul trivalent al lui Lukasiewicz notat cu L_3. Pentru că sistemul prezintă unele dificultăţi de interpretare Lukasiewicz procedează la anumite generalizări obţinând sisteme n - valente şi chiar infinit valente. În acest ultim caz este indiferent dacă mulţimea valorilor logice este de cardinal $\aleph_0$ sau $\aleph_1$, cu alte cuvinte dacă este infinit numărabilă sau nenumărabilă. Simbolic acest lucru se exprimă prin identitatea: $C_n [L_{\aleph_0}(A)] = C_n[L_{\aleph_1}(A)]$, unde „$C_n$" este conceptul de *consecinţă logică* iar A mulţimea axiomelor în sistemul respectiv.

Notând cu $T(L_n)$ mulţimea tautologiilor în sistemul L_n, Ackermann a demonstrat o importantă metateoremă care stabileşte un raport direct între cardinalitatea mulţimii de valori logice şi mulţimea tautologiilor în familia de sisteme de tip Lukasiewicz:

$T (L_{\aleph_0}) \subset T (L_{kn}) \subset ... \subset T(L_{2n}) \subset T (L_n) \subset T(L_2)$.

Acest rezultat are la bază faptul că tautologiile din L_m sunt incluse în tautologiile din L_n dacă şi numai dacă există un întreg k astfel că $k (n - 1) = (m - 1)$.

O serie de generalizări interesante a dat Gödel în raport cu sistemul său G_3 definit pe intervalul [0,1] astfel:

$$\neg x = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x = 0 \\ 0, \text{ dacă } x \neq 0 \end{cases}$$

$(x \cdot y) = \min (x,y)$

$(x \vee y) = \max (x,y)$

$$(x \rightarrow y) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x \leq y \\ y, \text{ dacă } x > y \end{cases}$$

$$(x \Leftrightarrow y) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x = y \\ \min (x,z), \text{ dacă } x \neq y \end{cases}$$

Toate teoremele calculului propoziţional intuiţionist (CPI) sun teoreme în G (nu şi invers). Pentru cazul special în care n = ℵ s obţine sistemul Gℵ a cărui teoreme sunt teoremele CPI. Gödel demonstrat că nici un calcul polivalent finit nu poate reproduce toat teoremele CPI. Altfel spus, logica intuiţionistă nu este o logic finitistă.

Câteva cuvinte acum despre caracterul infinitist al logicilo modale. În 1936 S.Jaskowski a elaborat un procedeu aritmetic pri care se pot obţine sisteme polivalente plecând de la produsul aritmeti a două sau mai multe sisteme date. Despre ce este vorba? Dacă S_1 ş S_2 sunt două sisteme oarecare, putem forma sistemul produs S_1 x S astfel că:

a) Valorile logice în S_1 x S_2 vor fi perechile ordonate $<a_i, b_j>$ unde a_i S_1 şi $b_j \in S_2$.

b) Valoarea logică a unei expresii E este $<a_i, b_j>$ în S_1 x S_2 dacă numai dacă valoarea expresiei E este a_i în S_1 şi b_j în S_2.

Negaţia şi ceilalţi operatori logici se definesc în S_1 x S_2 dup regulile:

R_1) , $\neg < a_i, b_j > = < , \neg a_i, \neg b_j >$

R_2) $< a_i, b_j > * < a'_i, b'_j > = < a_i * a'_j ; b_i * b'_j >$.

(Aici „ * “ poate oricare din operatorii &, V, →, ≡).

Cele mai studiate sisteme produs sunt cele obţinute di produsul unui sistem cu el însuşi. Să notăm cu „Π“ operaţia produs î raport cu sistemul S.

$\Pi_K S$ = SxSx...xS (de K ori)

ΠS = SxSx...

După cum arată N.Rescher în lucrările sale *Topics i philosophical logic* şi *Many valued logics* sistemul modal S5 est rezultatul produsului infinit PC_2 unde C_2 este sistemul propoziţion bivalent. În PC_2 valorile logice vor fi şiruri infinite de 1 şi 0 cu ca am notat adevărul şi falsul în C_2. Singura valoare desemnată este şir infinit 111... . Regulile de adevăr se obţin prin particularizarea cel două reguli generale date mai sus. Lor li se adaugă reguli specia pentru operatorii modali:

$$Lp = \begin{cases} 111..., \text{ dacă } p = 111... \\ 000..., \text{ dacă } p \neq 111... \end{cases}$$

$$Mp = \begin{cases} 111..., \text{ dacă } p \neq 000... \\ 000..., \text{ dacă } p = 000... \end{cases}$$

Desigur, se poate pune şi altfel în evidenţă caracterul infinitist al sistemelor modale de tip Lewis, aici m-am limitat la o simplă exemplificare luând ca punct de plecare un procedeu aritmetic. Scopul urmărit a fost de a vedea ce rol joacă în sistemele polivalente şi modale categoriile numerice discutate până acum şi nu să demonstrăm un rezultat sau altul.

4. ESTE STRUCTURA (FORMALĂ) SPECIFICĂ MATEMATICII?

Un alt concept matematic care s-a dezvoltat pe terenul matematicii moderne şi care s-a dovedit util pentru anumite aplicaţii cu caracter logic este conceptul de *structură* sau *structură formală* cum preferă unii autori să îl numească. Caracterul formal al structurii se referă la faptul că se face abstracţie de natura concretă a elementelor acordându-se atenţie doar relaţiilor dintre elemente şi proprietăţiilor acestor relaţii. „Trăsătura comună - arată Bourbaki - a diverselor noţiuni cuprinse sub acest nume generic este că ele se aplică unor mulţimi de elemente a căror natură *nu este specificată*; pentru a deveni o structură se dau una sau mai multe relaţii în care intervin aceste elemente (...) se postulează pe urmă că acolo unde relaţiile date satisfac anumite condiţii (care sunt enumerate) acestea sunt axiomele structurii" (9; 545). Sensul termenului „formal" este întrucâtva diferit aici de sensul logic care trimite în principal la ideea de formă logică. Desigur, între ele există anumite puncte comune în baza cărora se poate face trecerea de la o accepţiune la alta şi care explică într-o oarecare măsură posibilitatea introducerii conceptului de structură în logică. Pasajul reprodus mai sus după Bourbaki este important nu

numai pentru lămurirea ideii de formal ci şi pentru o eventuală definiţie a conceptului de structură. Aceasta s-ar putea da ca o mulţime nevidă pe elemente căreia s-a definit un sistem de operaţii şi relaţii ce verifică anumite axiome. Pentru ilustrare să considerăm mulţimea A = { a, b,...}, relaţia „=" (egalitatea) şi o operaţie oarecare „ * ", astfel că pentru orice a, b, c ∈ A au loc relaţiile:

$a * (b * c) = (a * b) * c$

$a * e = a = e * a$

$a * a' = e = a' * a$

O asemenea structură redată simbolic prin {A, *}, este cunoscută în matematică sub denumirea de *grup*. Mulţimea A poate fi mulţimea numerelor întregi, iar „ * " operaţia de înmulţire sau adunare. Aceasta înseamnă că structurile {Z, ×}, {Z,+} sunt exemple de grupuri în matematică. Se pot da în continuare foarte multe astfel de exemple pe care nu consider necesar să le enumăr aici. Ideea de bază este că orice mulţime de entităţi (numere, funcţii, vectori etc.) care satisfac axiomele de mai sus, vor satisface implicit orice teoremă dedusă în mod logic din axiome. Se realizează astfel o „considerabilă economie în efortul de gândire" (Bourbaki) structurile dovedindu-se din acest punct de vedere veritabile instrumente în cercetarea matematică.

Cu toate că dezvoltarea structuralistă a matematicii este de dată relativ recentă, ideea de structură apare încă în secolul trecut datorită, între altele şi cercetărilor lui G.Boole în domeniul logicii. Se poate spune că „algebra booleană" (sau „algebra logică" cum mai este ea denumită astăzi) este un exemplu de structură apărută pe terenul logicii care s-a generalizat treptat şi în matematică. Elaborarea teoriei mulţimilor de către G.Cantor, ca şi perfecţionările aduse la sfârşitul acestui secol metodei axiomatice au făcut ca ideea de structură să câştige tot mai mult în claritate şi să cucerească spaţii tot mai vaste în ştiinţa matematicii. Practic, au fost identificate structuri în teorii matematice considerate în mod tradiţional ca independente între ele. S-a realizat astfel o unificare din „interior" a unei matematici care se comporta ca un veritabil „univers în expansiune". În principal această sarcină a fost asumată de proiectul bourbakist de reorganizare a matematicii, proiect despre care s-a spus pe bună dreptate că

reprezintă următorul mare eveniment în dezvoltarea matematicii după programele funcționaliste de la începutul acestui secol. După cum se afirmă adeseori în textele bourbakiste acest proiect nu comportă o dimensiune fundaționistă scopul lui fiind mult mai modest, și anume de a arăta că în actualul ei stadiu de dezvoltare matematica se organizează în conformitate cu anumite tipuri de structuri. Aceste tipuri de structuri sunt clasificate de Bourbaki în trei mari categorii - structuri algebrice, de ordine și topologice.

Mulți filosofi din zilele noastre au încercat să găsească afinități între programul bourbakist și orientări tradiționale în filosofia logicii și a matematicii. H.Putnam, de exemplu, asociază acestui program o poziție logică similară logicismului pe care o intitulează „filosofia lui *dacă... atunci...* ca filosofie a matematicii" (if - thenism as philosophy of matematics). Așa cum preciza Russell în *Introducere* la *Principia Mathematica* această teză nu trebuie înțeleasă în sensul că orice enunț matematic este de forma „dacă... atunci...", ci în sensul că dacă anumite entități matematice verifică cutare proprietăți ele verifică implicit o serie de alte proprietăți care sunt consecințele acestora. Așadar, matematica nu se ocupă cu un nou gen de entități - structurile - ci cu derivarea unor noi teze din noi axiome prin intermediul logicii (luată în sensul de teorie a cuantificării). Ierarhizarea deductivă a matematicii ajunge astfel până la principii logice.

O interpretare de inspirație intuiționistă va încerca G.T.Kneabone (43; 325) plecând de la unele lucrări explicative elaborate de Bourbaki cum ar fi articolul „Arhitectura matematicii" (8) sau memoriul adresat de Bourbaki Asociației Internaționale de Logică Simbolică. Matematica - se arată în acest memoriu - nu are nevoie de nici un fel de legitimare din partea logicii sau filosofiei și trebuie considerată ca ceva dat. Aceasta pentru că „demonstrațiile există înainte ca structura lor să poată să fie analizată logic". (cf. Kneebone, pag. 329). Se apreciază în continuare că „logica nu poate fi nici mai mult nici mai puțin decât gramatica limbajului utilizat în matematică, un limbaj care există mai înainte ca gramatica lui să poată fi construită". (op. cit. pag. 329).

Întrucât la nivel logic apar toate „elementele constitutive" ale structurii este firesc să vorbim despre aplicațiile logice ale structurilor

matematice şi chiar de structuri pur logice. Pentru început voi trece în revistă câteva din principalele structuri matematice din clasificarea făcută de Bourbaki.

1) ***Structuri algebrice***. Am vorbit deja despre una din principalele structuri algebrice - *grupul*. În general, o structură algebrică este caracterizată prin una sau mai multe operaţii (numite şi *legi de compoziţie*) şi de axiomele corespunzătoare. M.H.Stone este primul autor care a identificat în logică structuri de grup relativ la operatorii logici „+„ (disjuncţie exclusivă) şi „≡" (echivalenţă):

(P+Q)+R) =(P+(Q+R)) (P≡Q) ≡R) = (P≡ (Q≡R))

P+f) = P (P≡v) = P

P+P) = f (P≡P) = v

Întrucât operaţiile „+", „≡" sunt comutative, grupurile {P, +}, {P, ≡} sunt grupuri comutative sau abeliene. Dacă, în plus, adăugăm operatorii „•" (conjuncţie) şi „V" (disjuncţie neexclusivă) precum şi axiomele

P• (Q + R) = (P • Q) + (P • R)

P V (Q ≡ R) = (P V Q) ≡ (P V R)

obţinem structurile de inel {P, +, •}, {P, ≡, V}.

Structura algebrică de *corp*, o altă structură fundamentală pentru matematică, aduce deja unele particularităţi. Strict vorbind ea este punctul în care matematica începe să se distanţeze de logică. Reamintesc că este corp o conjuncţie de inel şi de grup în care operaţiile sunt distribuite una în raport cu cealaltă. Gr. Moisil a formulat pentru logică un concept mai slab de corp pe care l-am putea numi după Gh.Enescu „corp logic" sau „cvasicorp". Această structură adaugă la condiţiile de inel următoarele particularităţi:

P • v = v • P = P P V f = f V P = P

P • f = f • P = f P V v = v V P = v

P • P = P P V P = P

Este vorba, cum se poate uşor observa, de o *varietate* în raport cu modelul sau cu conceptul clasic de corp şi nu de o simplă abatere de la axiomele corpului cum au considerat unii.

Este de departe vizibil că aceste structuri nu aduc avantaje prea mari pentru logică. Ele pot conduce la unele sistematizări utile

prin compararea diferitelor sectoare ale logicii, dar toate acestea reprezintă, totuşi, destul de puţin.

O valorificare interesantă a structurii de inel a dat-o Gr. Moisil prin logica propoziţiilor prin aşa numitele „inele de caracteristică". Prin „caracteristică de inel" înţelegem cel mai mic întreg pozitiv n pentru care are loc relaţia n • e = 0. Inelul {P, +, •}, arată logicianul român, este izomorf inelului claselor de resturi întregi modulo 2 a cărui legi de compoziţie sunt:

+	1	0
1	0	1
0	1	0

•	1	0
1	1	0
0	0	0

Cu 1 şi 0 am notat clasele de resturi faţă de modulul 2. Astfel $n \in 0$ dacă m împărţit la 2 dă restul 0 şi $n \in 1$ dacă dă restul 1. Prin relaţiile de congruenţă acest lucru se exprimă astfel:
$n \equiv 0 \pmod 2$ şi $n \equiv 1 \pmod 2$.

Întrucât în acest inel are loc relaţia $x^n = x$ rezultă că orice polinom este de gradul întâi şi are forma:
1) $f(x) = ax + b$ (pentru o variabilă)
2) $f(x,y) = axy + bx + cy + d$ (pentru două variabile).

Se poate calcula acum valoarea coeficienţilor *a, b, c, d* pentru valorile 1şi 0 ale variabilelor pe care substituindu-le apoi în 1) şi 2) obţinem:
3) $f(x) = [f(1) - f(0)]x - f(0)$
4) $f(x,y) = [f(1,1) - f(0,1) - f(1,0) + f(0,0)]xy + [f(1,0) - f(0,0)x + [f(0,1) - f(0,0)]y + f(0,0)$.

Dezvoltările 3) şi 4) după variabilele x, y pot fi interpretate ca funcţii de adevăr pentru care obţinem mai departe definiţiile:
$\sim x = 1 - x$
$x \cdot y = xy$
$x \vee y = x + y - xy$
$x \rightarrow y = 1 - x + xy$
$x \equiv y = 2xy - x - y + 1$

Toate calculele le-am făcut în aritmetica numerelor întregi. Dacă le refacem în aritmetica claselor de resturi întregi modulo 2 obţinem

$\sim x = 1 + x$

$x \cdot y = xy$

$x \vee y = x + y + xy$

$x \rightarrow y = xy + x + 1$

$x \equiv y = x + y + 1$

O corelare algebrică asemănătoare dă Moisil şi pentru logica trivalentă a lui Lukasiewicz. Cele trei valori logice din acest sistem sunt interpretate prin clasele de resturi întregi modulo 3 în care 1 este adevărul, 0 este falsul, iar 2 este posibilul. Tabelele pentru operatorii $\sim$, $\cdot$, se reconstruiesc asemănător:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

•	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Un polinom de o variabilă este de gradul doi şi va avea forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ pe care o putem dezvolta după valorile 0, 1, 2 ale variabilei:

$f(x) = 2(x - 1)(x - 2) f(0) + 2x(x - 2) f(1) + 2x(x - 1) f(2)$

Prin interpretări corespunzătoare obţinem mai departe definiţia negaţiei (N) ca şi a operatorilor modali mai importanţi: L (necesar), M (posibil), Q (contingent) şi U (imposibil):

$Nx = 2x + 1$

$Lx = 2x^2 + 2x$

$Mx = x^2$

$Qx = x^2 + x + 1$

$Ux = 2x^2 + 1$

Inelele de caracteristică studiate de Moisil sunt importante pentru posibilitatea redefinirii operatorilor logici, inclusiv a celor modali, în diferite sisteme de aritmetică modulară. Definiţiile obţinute sunt similare celor examinate în primul capitol ceea ce înseamnă că aritmetizarea logicii poate porni şi de la o aplicaţie de ordin algebric.

2)***Structuri de ordine***. Dacă în structurile algebrice rolul central revine operaţiilor şi proprietăţilor lor formale, în structurile de ordine acest

rol revine relaţiilor. În logică se studiază câteva relaţii fundamentale cum este implicaţia, echivalenţa, relaţia de consecinţă logică, ş.a. Unele dintre acestea au proprietăţile de ordine tare, altele sunt relaţii de ordine slabă (sau parţială). Reamintesc că o relaţie R este de ordine tare (sau strictă) dacă este ireflexivă, asimetrică şi tranzitivă. Dacă relaţia este reflexivă, antisimetrică şi tranzitivă atunci ea este de ordine parţială. Presupun cunoscute aceste proprietăţi şi nu insist asupra lor.

Definiţia 1. Se numeşte mulţime ordonată o pereche de tipul $\{A, \leq\}$ unde $A \neq \varnothing$ iar $\leq$ este o relaţie de ordine (a nu se confunda cu relaţia „mai mic sau egal" din matematică pe care o simbolizează în mod obişnuit).

Din examinarea structurilor algebrice a rezultat că unele elemente au în raport cu operaţiile un statut mai special cum este elementul neutru în teoria grupurilor sau elementul invers. Acelaşi lucru se întâmplă şi cu structurile de ordine, numai că aici elementele speciale prezintă o anumită simetrie:

Minim - maxim,
Minimal - maximal,
Minorand - majorand,
Margine inferioară - margine inferioară.

Cu ajutorul acestor concepte pe care le presupun cunoscute, se pot defini câteva dintre structurile de ordine, mai importante (latice, filtru, ideal, algebră booleană ş.a.).

Definiţia 2. Fie tripletul $\{A, T, \perp\}$ unde A este ordonată de relaţia $\leq$ iar T, $\perp$ sunt două operaţii binare. Dacă pentru orice $x, y \in A$ au loc relaţiile:

Iuf $(x, y) = x \, T \, y$
Sup $(x, y) = x \perp y$

atunci „$\leq$" este o ordine laticiară, iar $\{ A, \leq \}$ o latice.

Axiomele laticei se pot reformula cu ajutorul celor două operaţii:

$x \perp x = x$ $\qquad$ $x \, T \, x = x$
$x \perp (y \perp z) = (x \perp y) \perp z$ $\qquad$ $x \, T \, (y \, T \, z) = (x \, T \, y) \, T \, z$
$(x \perp y) \, T \, y = y$ $\qquad$ $(x \, T \, y) \perp y = y$

Un exemplu logic de latice este $\{P, V, \bullet\}$ unde $Inf(p, q) = p \bullet q$ şi $Sup(p, q) = p \, V \, q$ iar „$\rightarrow$" este relaţia de ordine laticiară.

Caracteristic pentru structur· de latice este principiul dualității potrivit căruia într-o axiomă sau teoremă putem înlocui peste tot pe „⊥" și „T" și pe „≤" cu „≥" obținând tot o axiomă sau teoremă. În exemplificarea logică a laticei, $p \to (p \vee q)$ este duală cu $(p \cdot q) \to p$.

Plecând de la axiomele latic·i putem defini conceptele de filtru și ideal:

Definiția 3. O mulțime A' a unei l·tici A este filtru în A dacă pentru ·rice x, y∈A' au loc condițiile:

1. $y \in A' \to xTy \in A'$,
2. $x \in A' \cdot x \le y) \to y \in A'$.

Categoria duală filtrului este *idealul* a cărui axiome se obțin din axiomele de mai sus făcând substituțiile conform cu principiul dualității. În logică {P, •}, {P, V} s·nt filtru respectiv ideal.

Un rol aparte în structurile de ordine îl au elementele *Min* și *Max* pe care le numim „elemen· prim" (sau „zero") și „element unitate" și pe care le notăm de regu·ă cu „0" și „1".

Să presupunem că o latice î· are pe 0 ca element prim și pe 1 ca element unitate. Un element c∈A ·e numește T - complementul lui x în A dacă c este cel mai mic elem·nt astfel că xTc = 0. Dacă există și un element c'∈ A astfel că $c' \perp x = 1$, atunci c' este ⊥ - complementul lui x. Noțiunile de T - complement și ⊥ - complement sunt duale (T - complementul se mai numește și p·eudocomplement).

Definiția 4. Unelement c este comle·entul lui x în A dacă el este simultan T - complement și ⊥ - complement, ·dică dacă au loc relațiile:

$x \, T \, c = 0$

$x \perp c = 1$

Definiția 5. Fie x, y elemente î·tr-o latice A. Un element c este pseudocomplementul lui x relati· la y dacă c este cel mai mare element din A astfel că $x \, T \, c \le y$. ·seudocomplementul lui x relativ la y se va nota cu „$x \Rightarrow y$". Prin defin·ție

$(x \le (y \Rightarrow z)) \equiv ((x \, T \, y) \le z)$

În baza conceptelor nou i·troduse se pot defini mai departe câteva specii importante de latici.

a) *Latice completă.* Dacă pentru o·ice $A' \subset A$ $(A' \neq \varnothing)$ există Inf A' = TA' și Sup A' = ⊥A' atunci A ·ste o latice completă. Orice latice

completă $\{A, \perp, T,\}$ are element zero şi element unitate.

b) *Latice distributivă.* O latice A este distributivă dacă pentru orice x, y, $z \in A$ au loc relaţiile:

$x\ T\ (y \perp z) = (x\ T\ y) \perp (x\ T\ z)$

$x \perp (y \perp z) = (x \perp y)\ T\ (x \perp z)$

c) *Latice complementată.* O latice A în care fiecare element x admite un complement x' se numeşte complementată.

d) *Algebră booleană.* O latice completă A, distributivă şi complementată se numeşte algebră booleană.

e) *Algebră pseudobooleană.* Orice latice A pseudocomplementată cu element prim este o algebră pseudo-booleană.

Fie $x \in A$ şi pseudocomplementul lui x'. În sistemul de notaţii pe care l-am adoptat, următoarele relaţii sunt caracteristice pentru algebra pseudobooleană:

$x' = (x \Rightarrow 0)$

$xTx' = 0$

(Într-o astfel de latice nu există element unitate şi ca atare nici $\perp$-complement)

Fiecare din structurile laticiare introduse corespunde unui anumit sistem logic. Pentru a face mai clară această idee, conceptele laticiare introduse primesc următoarele interpretări logice:

a) 1 şi 0 reprezintă adevărul respectiv falsul.

b) ', $\perp$, T reprezintă operatorii logici ~, V, •.

c) Complementul x' (resp. $x \Rightarrow 0$) este ~x (resp. $x \rightarrow f$).

d) „$\leq$" este relaţia implicativă „$\rightarrow$".

Tabelul de mai jos redă corespondenţele dintre diferitele sisteme logice şi structurile laticiare specifice lor.

Logica	Structura laticiară corespunzătoare
pozitivă	Laticea pseudocomplementată relativ
pozitivă cu seminegaţie	Laticea pseudocomplementată relativ cu element zero
minimală	Latice complementată contrapoziţională
intuiţionistă	Algebră pseudo booleană
clasică	Algebră booleană

Dacă luăm în considerație și alte sisteme logice cum ar fi logica polivalentă și modală, atunci va trebui să admitem structuri reticiare mai complexe. Un tip special de latice pentru sistemele polivalente sunt „algebrele Luckasiewicz" introduse de Gr.Moisil. De notat că diferențele dintre diferite tipuri de ordine corespund diferențelor dintre diferite tipuri de implicație care stau la baza sistemelor logice invocate. Proprietățile implicației materiale pot fi foarte bine sistematizate prin axiomele algebrelor booleene de aceea consider acest tip de latice drept structura de bază a logicii [1]

3. ***Structuri topologice***. Fie A, B două mulțimi într-un univers X și D, I două operații numite de „deschidere" respectiv „închidere". Vom spune că X este un spațiu topologic dacă pentru orice $A \subset X$ există $DA \subset X$ și $IA \subset X$ astfel că:

1. $D(A \cap B) = DA \cap DB$	1'. $I(A \cup B) = IA \cup IB$
2. $DDA = DA$	2'. $IIA = IA$
3. $DA \subset A$	3'. $A \subset IA$
4. $DX = X$	4'. $I\varnothing = \varnothing$

Operațiile D, I se interdefinesc cu ajutorul negației:

5. $DA = -I -A$	5'. $IA = -D -A$

Sistemul {X,D} este un spațiu topologic de deschidere, iar {X,I} de închidere.

Există două modalități mai importante de aplicare în logică a acestor structuri: a) prin păstrarea semnificațiilor mulțimiste a elementelor X,A,B,D,I care intervin în axiomele 1 - 5, 1' - 5' și b) prin abandonarea acestor semnificații și aplicarea pur formală (în sensul lui Hilbert) a celor două grupe de axiome. Iată și câteva perechi de concepte logice care verifică axiomele structurilor topologe pe care le-am reformulat după Gh. Enescu (*Logica și structurile topologice*, Analele Univ. București, 1986)

a) *Necesar și posibil.* Notăm cu L necesarul și cu M posibilul, iar tautologia și contradicția cu T și C. Următoarele expresii modale reproduc din punct de vedere formal axiomele deschiderii și închiderii.

---

[1] Pentru o discuție mai amplă a conceptului de structură în logică cititorul poate consulta cartea lui Tr. Stirbăț *Corespondențe structurale în logica modernă* (Editura Junimea, Iași, 1986)

$L(p \cdot q) = Lp \cdot Lq$ $\quad M(p \vee q) = Mp \vee Mq$

$LLp = Lp$ $\quad MMp = Mp$

$Lp \rightarrow p$ $\quad p \rightarrow Mp$

$LT = T$ $\quad MC = C$

Cei doi operatori modali se interdefinesc după modelul operatorilor topologici: $Lp = \sim M \sim p$ şi $Mp = \sim L \sim p$.

b) Asertare şi ipoteză. Notăm cu „$\vdash$" asertarea şi cu „H" ipoteza. Restul simbolurilor rămân aceleaşi:

$\vdash (p \cdot q) = \vdash p \cdot \vdash q$ $\quad H(p \vee q) = Hp \vee Hq$

$\vdash \vdash p = \vdash p$ $\quad HHp = Hp$

$\vdash p \rightarrow p$ $\quad p \rightarrow Hp$

$\vdash T = T$ $\quad HC = C$

Evident, au loc definiţiile $\vdash p = \sim H \sim p$ şi $Hp = \sim \vdash \sim p$.

c) *Cuantorul universal şi existenţial.* Notăm cu T[x] şi C[x] tautologiile respectiv contradicţiile care îl conţin pe x.

$\forall x (Fx \cdot Gx) = \forall x Fx \cdot \forall x Gx$ $\quad \exists x (Fx \vee Gx) = \exists x Fx \vee \exists x Gx$

$\forall x Fx \rightarrow Fy$ $\quad Fy \rightarrow \exists x Fx$

$\forall x \forall x Fx = \forall x Fx$ $\quad \exists x \exists x Fx = \exists x Fx$

$\forall x T[x] = T[x]$ $\quad \exists x C[x] = C[x]$.

Cei doi cuantori se definesc în maniera cunoscută: $\forall x Fx = \sim \exists x \sim Fx$ şi $\exists x Fx = \sim \forall x \sim Fx$. A se vedea, de asemenea, simertiile dintre operatorii, $\forall$, $\exists$ şi L, M relativ la axiomele topologice. De altfel, Von Wright a construit sistemele sale modale pornind tocmai de la analogiile formale existente între cele două categorii de operatori.

O serie de concepte logice prezintă proprietăţi apropiate de axiomele spaţiilor topologice, dar care diferă totuşi de acestea sub diferite aspecte. Aşa este conceptul de *consecinţă logică*, de exemplu, pe care îl simbolizăm cu Cn şi care prezintă următoarele proprietăţi:

$Cn (A \vee B) = Cn (Cn A \vee Cn B)$

$A \subset Cn A$

$Cn (Cn A) = Cn A$

$Cn \phi = S$ (S este sistemul deductiv în care se defineşte Cn).

De notat că acest concept nu are un corelat logic care să verifice axiomele închiderii. Gh.Enescu vorbeşte, în articolul citat,

despre conceptul de *antecedență logică*, concept însă insuficient definit.

Un alt concept logic care prezintă proprietăți logice similare celor discutate este conceptul de adevăr. Dacă notăm cu „$\mathcal{A}$ p" propoziția „este adevărat p", vom constata că „ $\mathcal{A}$" verifică atât axiomele deschiderii cât și ale închiderii:

$\mathcal{A}(p \cdot q) = \mathcal{A}p \cdot \mathcal{A}q$ $\qquad$ $\mathcal{A}(p \vee q) = \mathcal{A}p \vee \mathcal{A}q$

$\mathcal{A}\mathcal{A}p = \mathcal{A}p$ $\qquad$ $\mathcal{A}\mathcal{A}p = \mathcal{A}p$

$\mathcal{A}p \rightarrow p$ $\qquad$ $p \rightarrow \mathcal{A}p$

$\mathcal{A}T = T$ $\qquad$ $\mathcal{A}C = C$

Relația $\mathcal{A}p = \sim\mathcal{A} \sim p$ ("este adevărat p" echivalent cu „nu este adevărat non - p") servește și aici ca relație de interdefinibilitate. Avem de-a face și de această dată cu structuri mai slabe, un fel de „varietăți topologice" în raport cu aplicațiile logice ale conceptului de spațiu topologic.

5. CONCLUZII

Principalele concepte matematice se aplică în logică, dar statutul lor aici este mult diferit de statutul lor din matematică. Ceea ce interesează în primul rând nu sunt aplicațiile ca atare (ele nu aduc avantaje considerabile), cât „starea logică" a acestor concepte dacă mă pot exprima astfel. Nici funcțiile logice nu sunt reductibile la funcțiile matematice, după cum nici structurile logice nu sunt simple exemplificări ale structurilor matematice. Fie că este vorba de logică, fie de matematică, avem de-a face cu unele particularizări ale unor concepte extrem de generale pe care nu le mai legăm de un domeniu anume. Chiar și numărul s-a dovedit a nu mai fi un „atom democritic" pentru matematică, cum se exprimă foarte sugestiv Gh. Enescu. Deși definiția prin clase de echivalență nu duce la un concept mai general de număr, s-a dovedit totuși, că nici el nu este refractar la o abordare logică.

Funcționarea logică a acestor concepte reclamă un simbolism special de aceea analiza simbolismului logic nu trebuie separată de analiza conceptelor pe care le fixează. Dacă am tratat separat aceste probleme am făcut-o din rațiuni de ordin metodologic și nu pentru că ele ar fi separate de fapt.

Probleme speciale se ridică în legătură cu conceptul de structură în logică . După cum am încercat să arăt, o anume prioritate o au structurile de ordine iar dintre acestea în primul rând cele booleene. Totuși, în ultima vreme își fac tot mai mult loc în cercetările logice structurile topologice. Merită consemnată aici observația lui Tr. Știrbăț cu privire la aportul structurilor topologice în aprofundarea unor sisteme logice de inspirație filosofică. Se știe că filosofia a stimulat în diferite forme dezvoltarea logicii, una din disciplinele logicii de inspirație filosofică fiind logica modală. Este curios că sistemele modale pot fi studiate astăzi de pe poziții matematice foarte avansate cum este topologia. Unitatea gândirii se regăsește, așadar, în cele mai abstracte forme de manifestare ale ei și anume în filosofie, logică și matematică.

Față de toate celelalte științe, logica dovedește o anume aptitudine pentru aplicațiile de ordin structural, dat fiind caracterul ei formal. Ideea de formă logică este corelatul cel mai intim al ideii matematice de structură. În virtutea formei logice se poate vorbi despre „structura propozițiilor" care în unele cazuri se apropie destul de mult de structurile matematice. Chiar și o formă logică foarte simplă cum este SaP („toți S sunt P") se dovedește a avea toate proprietățile unei relații de ordine parțială:

(Ref)	SaS
(Antisim)	$(SaP \ \& \ PaS) \rightarrow S = P$
(Tranz)	$(SaP \ \& \ PaQ) \rightarrow SaQ$

Cele trei proprietăți definitorii ale relației de ordine se „traduc" la nivelul formei logice prin identitate (Ref), Conversiune per accidens (Antisim) și modul silogistic *Barbara* (Tranz). Iată, deci, cum structura devine alături de funcție o altă modalitate de analiză logică a propoziției.

Desigur, inventarul structurilor logice nu se oprește aici. Încă din evul mediu se vorbește de *pătratul logic* o structură specifică

logicii, dar care este la ora actuală atât de generală încât poate fi comparată cu o structură din matematică cum este grupul. Există încercări de a utiliza această structură dincolo de granițele logicii, în lingvistică, de exemplu. Să nu uităm apoi că o serie de formațiuni algebrice au fost constituite în ultimele decenii în vederea aprofundării unor aspecte de ordin semantic. Amintesc câteva dintre ele: 1) algebrele de relație (introduse de Tarski), 2) algebrele proiective introduse de Evrett și Ulam pentru modelarea calculului cu predicate de ordinul întâi), 3) algebre de închidere (pentru logica modală) 4) algebre cilindrice (introduse de Tarski pentru logica predicatelor de ordinul întâi cu egalitate), 5) algebre poliadice (introduse de Halmos pentru logica predicatelor de ordinul întâi fără egalitate), ș.a. Rămâne de văzut în ce relație stau aceste algebre logice cu „structurile mamă" din clasificarea generală a structurilor matematice făcute de Bourbaki.

CAP. III

AXIOMATICA ÎN LOGICĂ ŞI MATEMATICĂ

Metodă prin excelenţă logică (se poate spune că ea este forma cea mai elaborată a metodei deductive), metoda axiomatică a trecut din logică în matematică unde s-a perfecţionat începând cu secolul trecut pentru ca în final să revină din nou în logică. Din punct de vedere istoric ea este legată de numele lui Aristotel care în organizarea silogisticii a avut în vedere existenţa unor *moduri perfecte* şi a unor procedee de reducere la acestea[1].

Văzută din perspectivă actuală, silogistica aristotelică apare ca un sistem desfăşurat în care sunt stabilite anumite „dependenţe" între modurile valide astfel încât ele să apară ca reductibile la modurile perfecte. În reluările moderne s-a pornit tocmai de la aceste dependenţe reuşindu-se axiomatizarea silogisticii în mai multe variante. Cititorul interesat ar putea încerca unele comparaţii între silogistica lui Aristotel şi axiomatizarea lui Lukasiewicz pe care am reprodus-o în finalul acestui capitol ca o ilustrare a conceptului de *teorie formalizată*.

Câteva elemente de noutate în ce priveşte aplicarea metodei axiomatice apar la Leibniz deşi nici el nu se ocupă de axiomatica propriu-zisă, ci doar de unele probleme particulare (diferite tipuri de deducţii în sistemul lui de notaţii). De abia la Frege se poate spune că apare primul sistem axiomatic în logică şi deci prima utilizare a metodei într-o formă apropiată de forma ei actuală. Forma definitivă va fi dată de abia în *Principia Mathematica* şi în lucrările care au apărut de atunci în domeniul logicii.

---

[1] La premisele istorice ale metodei axiomatice s-ar mai putea adăuga şi concepţia stoicilor despre schemele de inferenţă. Cinci din aceste scheme erau considerate ca indemonstrabile (Sextus Empiricus). Deşi stoicii nu dispuneau de un concept clar de completitudine se considera totuşi că aceste scheme sunt suficiente pentru demonstrarea celorlalte scheme valide.

În matematică, metoda axiomatică este legată din punct de vedere istoric de numele lui Euclid care dă prima construcție axiomatică pentru geometrie. *Elementele* lui Euclid vor rămâne singurul model de construcție axiomatică în matematică până spre sfârșitul sec. XIX odată cu apariția geometriilor neeuclidiene.

Exceptând unele contribuții aduse de Decartes, Pascal, Leibniz, s.a. se poate spune că noua eră a axiomaticii debutează la începutul acestui secol prin contribuțiile hotărâtoare adese de Peano (în aritmetică), Hilbert (în geometrie), Frege și Russell (în logică). „Ducerea la capăt, notează Hilbert, a sarcinii mari asumate de Russell - axiomatizarea logicii - poate fi privită ca încoronare a operei de axiomatizare în general"(33; 100).

Deși nu face parte din metodele așa zis „matematice", matematica a acaparat în așa fel metoda axiomatică încât o incursiune în cercetarea naturii sale se impune. Există destui autori care văd esența matematicii în demonstrație logica fiind înțeleasă din acest punct de vedere drept „studiul demonstrației matematice".

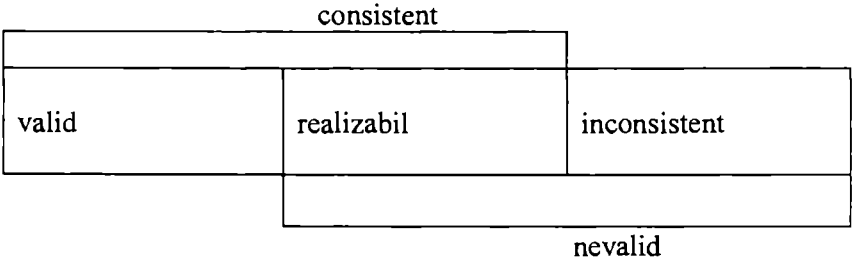
1. VALORI LOGICE ȘI PREDICATE METATEORETICE

Adevărul și falsul reprezintă două dintre categoriile de bază ale logicii formale. Există trei mari ipostaze în care aceste categorii apar în logica modernă: a) ca relații (vezi teoria adevărului corespondență a Aristotel), b) ca predicate metateoretice ale propozițiilor, și c) ca obiecte abstracte. Ideea că adevărul și falsul pot fi tratate ca două obiecte abstracte în genul numerelor din matematică i se datorează lui Frege însă ea apare foarte frumos exprimată de J. Lukasiewicz într-una din lucrările sale de început:"prin adevăr, scrie el, înțeleg nu o propoziție adevărată ci *obiectul* denotat de o propoziție adevărată, și prin fals înțeleg nu o propoziție falsă ci *obiectul* denotat de o propoziție falsă" (46; 90). Și mai departe: „Toate propozițiile adevărate denotă unul și același obiect, și anume adevărul, și toate propozițiile false denotă unul și același obiect și anume falsul. Eu consider adevărul și falsul ca pe obiecte singulare în același sens în care sunt numerele 2 sau 4" (46; 90).

Dacă P, Q, R,... sunt variabile propoziţionale atunci valoarea lor poate fi v sau f unde v şi f sunt simboluri pentru cele două obiecte abstracte - adevărul şi falsul. Nu se pune problema care anume propoziţie din limbaj stă pentru v şi care pentru f, important este că propoziţiile denotă aceste obiecte pe care le putem trata mai departe ca pe valori ale variabilelor.

O expresie propoziţională care ia valoarea v pentru orice valori posibile ale variabilelor sale se numeşte *lege logică* sau *tautologie*. Se mai folosesc pentru acest gen de expresii denumirile de expresii *logic valide* sau expresii *identic adevărate*. Dacă expresia ia valoarea v pentru unele valori ale variabilelor şi f pentru altele ea se va numi expresie *realizabilă* sau *contingentă*. În sfârşit, expresiile care iau numai valoarea f se numesc *contradicţii*, expresii *inconsistente* sau expresii *identic false*.

La un loc expresiile valide şi cele realizabile formează clasa expresiilor *consistente* iar cele inconsistente şi realizabile formează clasa expresiilor *nevalide*. Kleene sistematizează această clasificare a expresiilor propoziţionale cu ajutorul următoarei figuri:



Câteva observaţii pe marginea definiţiilor introduse mai sus. O primă observaţie ar fi că cele trei concepte au fost asociate în capitolul II funcţiilor de adevăr însă ele pot fi aplicate la fel de bine şi expresiilor. In fond orice expresie introduse (defineşte) o funcţie de adevăr de aceea clasificarea expresiilor urmează îndeaproape clasificarea funcţiilor de adevăr. Apoi cele trei concepte se definesc în baza relaţiei semantice dintre expresie şi semnificaţia sa, ele sunt aşadar concepte semantice. În capitolul IV vom vedea că aceste concepte se redefinesc din perspectiva conceptului semantic de *model*.

Pentru adevăr în sens semantic se foloseşte uneori simbolul „⊨". logica propoziţiilor prin „⊨ A" înţelegem „A este logic validă" („tautologie"). M-am rezumat aici la logica propoziţiilor însă treb ştiut că aceste concepte se redefinesc pentru fiecare teorie logică parte. Probleme speciale a ridicat logica modală unde nu s-a pu defini un concept specific de validitate până la apariţia semant lumilor posibile. Pentru că voi relua aceste probleme nu insist a asupra lor.

Se pune în mod firesc întrebarea ce legătură au toate ace probleme cu sistemul axiomatic şi cu metoda axiomatică în gener Răspunsul trebuie căutat în rolul pe care îl joacă în logică tautologi sau legile logice. Am spus cu altă ocazie că aceste legi guvernează diferie moduri schemele noastre de raţionament. Problema este m mai amplă însă aici mă voi rezuma la a spune că oricărei schei valide de raţionament îi corespunde o lege logică. De exemp schema de raţionament cunoscută sub numele de *modus ponens*

$$\begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ \underline{P\quad\quad} \\ Q \end{array}$$

este asociată legii $((P \rightarrow Q) \cdot P) \rightarrow Q$. Dar dacă lucrurile stau astfel, ridică în mod firesc câteva întrebări: a) cum recunoaştem că o formu este lege logică? b) cum se obţin aceste legi logice? c) ce raport există între ele? Sistemul axiomatic rezolvă în mod satisfăcător to aceste probleme ceea ce ne poate da o primă imagine asupra meto axiomatice. Ea poate fi luată fie în sens general (cu privire la teori fie în sens restrâns (cu privire la problemă). Şi într-un caz şi în celăl importanţa sa pentru logică este maximă.

Se înţelege că pentru a rezolva problemele învocate sistem axiomatic trebuie să satisfacă câteva condiţii dintre care de bază su *consistenţa*, *completitudinea* şi *independenţa*. Dată fiind importar lor pentru logică mă voi opri pe scurt asupra fiecăreia.

În sensul său cel mai general consistenţa înseam necontradicţie. Ea poate fi formulată sintactic sau semantic.

1) Un sistem axiomatic este consistent dacă pentru orice formulă A nu se poate demnonstra în sistem atât A cât şi ~A (consistenţa simplă sau consistenţa în sens sintactic).
2) Un sistem este consistent dacă orice formulă demonstrabilă este validă (consistenţa cu privire la validitate sau semantică).

O generalizare a definiţiei 2) s-ar putea da în felul următor: un sistem axiomatic este consistent dacă există cel puţin o interpretare pentru care formulele sistemului devin propoziţii adevărate. Tautologiile sau expresiile logic valide sunt adevărate în interpretarea prin „v"; şi „f" de aceea definiţia 2) este un caz particular în raport cu această definiţie.

Cel puţin pentru logica propoziţiilor s-au mai adăugat încă două sensuri ale termenului consistenţă:
3) Un sistem axiomatic este consistent dacă nu orice formulă ce poate fi construită în sistem este teoremă (teză) a sistemului (consistenţa în sensul lui Hilbert).
4) Un sistem axiomatic este consistent dacă nici o formulă constând dintr-o singură variabilă propoziţională nu este teoremă a sistemului (consistenţa în sensul lui Post).

De ce este necesar ca sistemele axiomatice să fie consistente sau necontradictorii? „Toate sistemele logice cât de cât importante, notează P.S. Novicov, sunt construite astfel încât atunci când unul dintre ele s-ar dovedi contradictoriu, ar însemna că în el sunt deductibile toate formulele şi, de aceea, astfel de sisteme nu pot reflecta deosebirea dintre adevăr şi fals" (55; 104).

O ilustrare simplă a acestei idei s-ar putea da cu ajutorul calculului natural (metodă deductivă fundamentală pentru logică de care însă nu am vorbit până acum). Presupun cunoscute regulile:

R1. $\frac{A.B}{A,B}$, R2. $\frac{A}{A \vee B}$, R3. $\frac{\sim A,\ A \vee B}{B}$,

1. $P \cdot \sim P$ (Supoziţie)
2. P (1, R1)
3. ~P (1, R1)
4. P V Q (1, R2)
5. Q (3, 4, R3).

Aşadar, într-un sistem în care s-a demonstrat P şi ~P se poate demonstra orice propoziţie Q (fiind o propoziţie oarecare, Q poate fi adevărată sau falsă).

Observaţii interesante face Novicov şi cu privire la consistenţă în sensul 3) de mai sus: "Faptul că într-un calcul contradictoriu, orice formulă este deductibilă poate fi utilizat pentru demonstrarea necontradicţiei. În acest sens este suficient să arătăm că există cel puţin o formulă nedeductibilă. De aici rezultă necontradicţia calculului" (55; 105). Într-adevăr, dacă într-un sistem axiomatic oarecare nu este demonstrabilă formula A atunci nu va fi demonstrabilă nici o altă formulă logic echivalentă cu A. Dacă A este formulă realizabilă sau contradicţie atunci nici o astfel de formulă nu este demonstrabilă şi deci sistemul este consistent.

Urmează completitudinea, proprietate ce constă în capacitatea sistemului de a putea reproduce toate propoziţiile adevărate dintr-un anumit domeniu. Există o completitudine în sens larg şi alta în sens restrâns. În sens larg un sistem este complet dacă orice formulă validă este derivabilă în sistem. În sens restrâns sistemul este complet dacă adăugarea unei formule care nu este derivabilă face sistemul inconsistent. Acest concept de completitudine se nuanţează după sensurile termenului de consistenţă examinate mai sus.

Completitudinea asociată consistenţei sporeşte capacitatea de decizie a sistemului până la limitele maxime ale acestuia - totalitatea formulelor adevărate din domeniul respectiv. În acest caz sistemul este decidabil întrucât pentru orice formulă putem spune dacă este teoremă sau această formulă sau negaţia ei.

Independenţa, a treia mare proprietate a sistemelor axiomatice înseamnă de fapt independenţa axiomelor sale. Întrebarea care se pune este dacă o axiomă poate fi dedusă din celelalte axiome prin regulile de deducţie admise. Dacă ea nu se poate deduce înseamnă că este independentă iar sistemul în care toate axiomele sunt independente este la rândul său independent. Este de preferat ca axiomele unui sistem axiomatic să fie independente şi când spun acest lucru nu mă refer neapărat la criterii de ordin estetic. Adeseori un sistem independent poate genera alte sisteme fie prin eliminarea unor axiome independente, fie prin adăugarea de noi axiome, fie prin eliminarea şi

adăugarea simultană (= înlocuirea) de axiome independente. Să nu uităm că geometriile neeuclidiene au apărut prin acest gen de operaţii în raport cu axioma paralelelor. Domeniul de semnificaţii descris prin axiomele respective se modifică şi el în mod corespunzător (se poate extinde, restrânge sau poate rămâne neschimbat). Geometriile neeuclidiene au introdus spaţii de metrică neeucliduană în care axioma paralelelor nu mai este valabilă. Ceva asemănător s-a întâmplat în logica intuiţionistă cu privire la domeniul valorilor de adevăr.

Demonstraţia de independenţă se face cu ajutorul conceptului de *consecinţă logică*: dacă A_1, A_2,..., A_n sunt axiome şi dacă există o interpretare a sistemului în care A_1, A_2,..., A_{n-1} sunt adevărate şi A_n falsă atunci A_n nu este consecinţă logică în raport cu celelalte axiome. Nefiind consecinţă logică axioma este independentă. Pentru fiecare axiomă în parte trebuie găsite astfel de demonstraţii de independenţă.

Câteva observaţii în legătură cu raportul dintre consistenţă şi completitudine. În general aceste proprietăţi sunt independente în sensul că un sistem poate fi consistent indiferent dacă el este sau nu complet. Nu întotdeauna lucrurile stau însă atât de simplu. Conform teoremei lui Gödel de incompletitudine sisteme formale mai bogate cum este sistemul *Principiei Mathematica* sau sistemul Zermelo - Fraenkel din teoria mulţimilor sunt principial incomplete (nu sunt demonstrabile în sistem propoziţiile care afirmă tocmai consistenţa sistemului). În demonstrarea acestei teoreme Gödel a plecat de la un concept mai special de contradicţie numit de el *ω - contradicţie*. O mulţime K de propoziţii este ω - contradictorie dacă există în K o funcţie propoziţională F(x) astfel încât sunt adevărate atât propoziţiile individuale $F(a)$, $F(b)$, ..., cât şi $\exists x \sim F(x)$

Cum trebuie să înţelegem această definiţie? Să presupunem că x ia valori într-un domeniu format numai din două elemente, D = {a, b}. Definiţia poate fi precizată mai departe astfel:

1) $F(a)$, $F(b)$, $\exists x \sim F(x)$ - adevărate prin supoziţie.
2) $F(a) \cdot F(b)$,
3) $\exists x \sim F(x) = \sim F(a) \vee \sim F(b)$,
4) $\sim F(a) \vee \sim F(b) = \sim(F(a) \cdot F(b))$,
5) $\sim(F(a) \cdot F(b))$.

Prin conceptul de ω - contradicție Gödel viza contradicția paradoxală și există chiar o strânsă analogie între această idee de contradicție și paradoxul mincinosului. Fie P_1, P_2,... propoziții și F predicatul „fals". Propoziția „toate propozițiile sunt false" (= paradoxul mincinosului într-una din variantele sale moderne) o simbolizăm cu $\forall pF(p)$. Formăm mai departe propozițiile $F(p_1)$, $F(p_2)$,..., $F(\forall pF(p))$. Dar $F(\forall pF(p))$ este totuna cu $\sim\forall pF(p)$ care mai departe este echivalentă cu $\exists p\sim F(p)$.

Conform teoremei lui Gödel un sistem S care este ω - consistent este incomplet, și invers. Cele două concepte (ω - consistență și completitudine) sunt în raport de contrarietate:

1) ω - cons(S) $\rightarrow \overline{\text{comp}}$ (S)

2) comp (S) $\rightarrow \overline{\omega \text{ - cons}}$(S)

Cu aceasta, consider că principalele predicate metateoretice ale logicii simbolice sunt suficient precizate. Atrag totuși atenția asupra ambiguității unor termeni ca „valid", „consistent" și „contingent" care ar putea duce la confuzii. În logica generală validitatea se referă exclusiv la raționamente față de logica simbolică unde validitatea se referă și la expresii. La rândul ei consistența poate caracteriza expresiile sau mulțimile de expresii (în sens foarte general un sistem axiomatic este o mulțime de expresii). În sfârșit, contingența poate fi înțeleasă ca realizabilitate (în logica simbolică) sau ca modalitate aletică (în logica modală). Pentru că între semnificațiile acestor termeni există raporturi logice bine determinate spunem că termenii în cauză se caracterizează prin *ambiguitate logică* sau *sistematică* (denumire introdusă de B.Russell).

2. SISTEME AXIOMATICE ÎN LOGICA PROPOZIȚIILOR ȘI LOGICA PREDICATELOR

Primul sistem axiomatic în logică (în sensul de sistem formal) este cel construit de Frege în *Begriffsschrift*. Între timp s-au construit încă multe altele încât astăzi se poate vorbi despre o adevărată clasă de

asemenea sisteme.[1] Ele diferă prin tipul axiomelor, numărul lor. regulile de deducție admise și încă multe altele. Astfel, mulțimea axiomelor poate să fie finită, infinită și chiar vidă. Primul caz este cel mai frecvent întâlnit deși asistăm și aici la o tendință de reducere a numărului de axiome. Dacă sistemul are o singură axiomă atunci se caută ca ea să fie cât mai simplă (chiar cea mai simplă dacă s-ar putea). Cazul al doilea corespunde sistemelor cu scheme de axiome introduse de Von Neumann. Din orice schemă de axiomă se obțin prin substituții corespunzătoare diferite axiome. Cum există o mulțime potențial infinită de substituții, există implicit o mulțime potențial infinită de sisteme de axiome. Cazul al treilea în care mulțimea axiomelor este vidă corespunde deducției naturale sau calculului natural cum mai este cunoscută această metodă în logică. Aici se operează numai cu reguli de deducție asupra unor expresii luate ca supoziții de unde și denumirea de „calcul al supozițiilor". Este discutabil dacă deducția naturală trebuie luată ca o metodă independentă sau dacă ea poate fi privită ca un caz limită de deducție axiomatică. Părerea mea este că această metodă se plasează între metoda axiomatică și metoda algoritmică. Se aseamănă cu metoda axiomatică prin faptul că ambele sunt metode deductive. De altfel trebuie precizat că ceea ce interesează în deducția naturală sunt deducțiile ca atare și nu doar formulele obținute prin aceste deducții. Spre deosebire de metoda axiomatică care se aplică exclusiv formulelor valide, deducția naturală se aplică formulelor consistente în general. Din anumite formule luate ca supoziție se deduc alte formule urmărindu-se validitatea acestor deducții.

Asemănarea cu metoda algoritmică se datorează faptului că ambele aplică reguli. Totuși, în deducția naturală regulile nu se aplică în mod mecanic ca în calculul matematic obisnuit. Termenul „calcul" nu trebuie de aceea să inducă în eroare pentru că el circulă în logică cu mai multe sensuri. Voi vorbi pe larg despre aceste probleme în capitolul următor deocamdată vreau să trec în revistă câteva din sistemele axiomatice mai importante în logica propozițiilor și logica

[1] A.N. Prior semnala în cartea sa *Formal Logic* (New-York, 1962), existența a nu mai puțin de 80 de sisteme la acea dată.

predicatelor. Regulile de deducție în aceste sisteme sunt regula substituției și regula detașării pe care le presupun cunoscute.

1) Sistemul lui Frege:

A1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

A2. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

A3. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$

A4. $(A \rightarrow B) \rightarrow (\sim B \rightarrow \sim A)$

A5. $\sim\sim A \rightarrow A$

A6. $A \rightarrow \sim\sim a$

2) Sistemul *Principiei Mathematica:*

A1. $A \rightarrow (A \vee B)$

A2. $(A \vee A) \rightarrow A$

A3. $(A \vee B) \rightarrow (B \vee A)$

A4. $(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow (A \vee C))$

A5. $(A \vee (B \vee C)) \rightarrow (B \vee (A \vee C))$

(În 1926 P.Bernays a demonstrat că axioma A5 nu este independentă de celelalte axiome. Metoda lui este folosită și astăzi în demonstrarea independenței axiomelor).

3) Sistemul Hilbert - Ackermann:

A1. $A \rightarrow (A \vee B)$

A2. $(A \vee A) \rightarrow A$

A3. $(A \vee B) \rightarrow (B \vee A)$

A4. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((C \vee A) \rightarrow (C \vee B))$.

4) Sistemul lui Lukasiewicz:

A1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

A2. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

A3. $(\sim A \rightarrow \sim B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

5) Sistemul lui Church

A1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

A2. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

A3. $(A \rightarrow f) \rightarrow f) \rightarrow A$.

(f este constanta logică fals $A \rightarrow f$ joacă aici rolul de negație a lui A iar A3 exprimă în formă implicațională proprietatea dublei negații).

6) Sistemul Tarski - Bernays:

A1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

A2. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$

A3. $(A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$

Dintre sistemele cu o singură axiomă voi menţiona sistemele pentru implicaţie şi echivalenţă şi sistemul lui Nicod pentru incompatibilitate. În ce priveşte implicaţia cele mai importante sisteme cu o singură axiomă sunt cele construite de Lukasiewicz între 1930 şi 1936.

$((A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow D)) \rightarrow (E \rightarrow ((D \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow A)))$

$((A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow D)) \rightarrow ((D \rightarrow A) \rightarrow (E \rightarrow (C \rightarrow A)))$

$((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow (D \rightarrow A))$

O serie de siteme cu o singură axiomă au fost construite pentru echivalenţă însă J.Lukasiewicz a demonstrat că dintre acestea

$(A \equiv B) \equiv ((C \equiv B) \equiv (A \equiv C))$

este cea mai simplă. O simplificare asemănătoare va da logicianul polonez şi pentru incompatibilitate:

$(A / (B / C)) / \{[D / (D / D)] / [(D / C) / ((A / D) / (A / D))]\}$

(deşi numărul variabilelor este aici mai mic decât în versiunea lui Nicod, lungimea formulei este practic aceeaşi).

Regula detaşării pentru incompatibilitate se formulează astfel: dacă A şi A / (B / C) sunt teze logice atunci C este teză logică[1]

Începând cu primele decenii ale acestui secol s-au construit o serie de sisteme axiomatice pentru logicile polivalente şi modale. Un interes aparte îl prezintă sistemele de logică intuiţionistă.

7) Sistemul lui Heyting

A1. $A \Rightarrow (A \wedge A)$

A2. $(A \wedge B) \Rightarrow (B \wedge A)$

A3. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \wedge C) \Rightarrow (B \wedge C))$

A4. $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

---

[1] Aspecte mai speciale legate de axiomatizarea logicii propoziţiilor cititorul poate găsi în studiile lui P.Bieltz *Sisteme axiomatice pur implicaţionale* (Analele Univ. din Bucureşti, seria Filosofie, Anul XXXVII, 1988, p.46-55) şi *Sisteme axiomatice cu constante propoziţionale şi variabile functoriale* (Analele Univ.Bucureşti, seria Filosofie, Anul XXXIX, 1990, p. 70-89). În numărul din 1991 al Analelor Univ. Bucureşti, logicianul român semnează de asemenea un interesant studiu cu privire la deducţia naturală în logica predicatelor.

A5. $B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
A6. $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$
A7. $A \Rightarrow (A \vee B)$
A8. $(A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)$
A9. $((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow C)$
A10. $\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
A11. $((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg A$
(Pentru că sensul operatorilor propoziționali este diferit și unele semne ale acestor operatori diferă).

Alte sisteme de logică intuiționistă s-au obținut fie prin modificarea unora dintre axiomele sistemului de bază fie din considerație de alt ordin. Menționez doar sistemul lui Johanson obținut prin eliminarea axiomei A11 (așa numitul „calcul minimal"), sitemele fără negație construite de Griss și Van Dantzig , sitemele cu negații speciale (Fevrier, Glimore, Lorenzen s.a.)[1]

Dacă la sistemele propoziționale invocate până acum se adaugă formulele predicative
1) $\forall x\, F(x) \rightarrow F(y)$
2) $F(y)\ \exists x \rightarrow F(x)$
se obțin axiomatizări corespunzătoare pentru logica predicatelor. Pentru că aici intervin mai multe tipuri de variabile vor exista mai multe reguli de deducție, în special reguli de substituție:
1) Reguli de substituție pentru variabilele individuale libere,
2) Reguli de substituție pentru variabilele predicative,
3) Regula de redenumire (pentru variabilele legate),
4) Reguli cu privire la cuantori.

Demonstrația de consistență este foarte simplă și constă în interpretarea formulelor predicative prin formule propoziționale. De unde provine această interpretare? Dacă se consideră că variabilele individuale iau valori într-un domeniu format dintr-un singur element *a*, atunci: $\forall x\, F(x)$, $\exists x\, F(x)$, $F(y)$,... se reduc toate la $F(a)$. Notând pe $F(a)$ cu P, cele două axiome predicative de mai sus se reduc la $P \rightarrow P$

[1] O prezentare detaliată a acestor sisteme poate fi găsită în cartea lui Alex. Surdu *Elemente de logică intuiționistă* (Editura Academiei, 1976) singura lucrare de acest gen în literatura românească de specialitate.

care este tautologie în logica propozițiilor. Prin același procedeu, de la formula $\forall x\ F(x) \equiv \sim\exists x \sim F(x)$ se ajunge la $P \equiv \sim\sim P$ care de asemenea este o tautologie propozițională. Pentru că există cel puțin o interpretare în care formulele sistemului se transformă în propoziții adevărate, sistemul este consistent. Probleme speciale ridică totuși completitudinea pentru că în interpretarea descrisă apar formule adevărate care nu pot fi demonstrate în sistem. Formula $\forall x\ F(x) \equiv \exists x\ F(x)$, de exemplu, nu face sistemul inconsistent însă ea nu poate fi demonstrată în sistem ca teoremă. În sens restrâns, așadar, sistemul nu este complet deși el este complet în sens larg. Conform teoremei lui Gödel de completitudine orice formulă adevărată este deductibilă în sistemul axiomatic al predicatelor. Întrucât există cel puțin un sens în care sistemul nu este complet el nu este nici decidabil. În capitolul următor voi relua problema decidabilității deocamdată vreau să fac o scurtă trecere în revistă a unor concepte metalogice mai importante care presupun sistemul axiomatic. Este vorba de conceptul de *consecință logică*, *sistem deductiv* și *teorie formalizată*. Despre fiecare din aceste concepte voi face în continuare câteva precizări.

3. SISTEMUL AXIOMATIC ȘI CONCEPTUL DE CONSECINȚĂ LOGICĂ

Conceptul de consecință logică a fost introdus de Tarski și poate fi definit atât sintactic cât și semantic. Definiția sintactică presupune sistemul axiomatic iar cea semantică conceptul de *model*. Pentru că problema modelelor semantice va fi discutată în cap. V mă voi rezuma aici la a spune că este model al unei formule X orice interpretare pentru care X este adevărată (sau care îl realizează pe X).

Fie A o mulțime de axiome logice și R regulile de deducție aferente lor. Sistemul $S = \{A, R\}$ este un sistem axiomatic oarecare. Relativ la o formulă M (sau grup de formule) se definește conceptul de consecință logică notat cu Cn(M).

Definiția 1. Pentru orice formulă M (sau grup de formule), Cn(M) este cea mai mică mulțime care conține pe M, axiomele A, și este închisă relativ la regulile de deducție R (pentru cazul particular în care $M = \varnothing$,

regulile de deducție se aplică numai axiomelor A ceea ce înseamnă că Cn(∅) = S).

Definiția 2. O formulă M este consecință logică în raport cu o clasă N de formule dacă orice model al clasei N este totodată un model al formulei M.

Tarski studiază proprietățile conceptului sintactic de consecință logică în manieră axiomatică. El adoptă în acest sens următorul sistem de axiome:

Axioma 1. $S^* \leq \aleph_0$ (sistemul S este cel puțin numărabil).

Axioma 2. Dacă $A \subset S$, atunci $A \subset Cn(A) \subset S$.

Axioma 3. Dacă $A \subset S$, atunci $Cn\ (Cn\ A) = Cn\ (A)$.

Axioma 4. Dacă $A \subset S$, atunci $Cn\ (A) = \sum Cn\ (x_i)$ unde $x_i \subset A$

Iată și câteva din teoremele deduse de Tarski din aceste axiome:

Teorema 1. Dacă $A \subset B \subset S$, atunci $Cn(A) \subset Cn(B)$.

Teorema 2. Dacă $A + B \subset S$, atunci $Cn(A + B) = Cn(Cn\ (A) + Cn(B))$.

Teorema 3. Dacă $A + B \subset S$, atunci $Cn\ (A + B)$ și $Cn(A) \subset Cn(B)$ sunt echivalente.

Teorema 4. Dacă $A \subset S$ și $C \subset Cn(A)$, atunci există o mulțime B astfel că $B \subset A$ și $C \subset Cn\ (B)$.

Conceptul de consecință logică poate fi privit ca mulțime, ca operație și ca relație. În formalizarea lui Tarski Cn(A) pare a indica o operație însă sensul inițial este cel de mulțime (mulțimea consecințelor lui A). Foarte importantă este însă și *relația* de consecință logică. Pentru relația sintactică de consecință se folosește semnul „⊢", iar pentru cea sistematică semnul „⊨". Întrucât aceste semne mai pot însemna și altceva redau mai jos câteva dintre principalele lor înțelesuri.[1]

---

[1] Semnul „⊢" provine de la Frege (1879) însă sensul lui actual a fost introdus de Kleene (1934) și Rosser (1935). Semnul „⊨" a fost introdus, se pare, tot de Kleene (1956).

$\vdash A$	„A este adevărată în sens sintactic“, „Există o demonstrație formală pentru A“ (sau „A este formal demonstrabilă“), „A este teoremă (sau teză)“
$\models A$	„A este adevărată în sens semantic“, „A este adevărată în orice interpretare“, „A este logic validă“.
$\Gamma \vdash A$	„A este consecință în sens sintactic din Γ“, „A este deductibilă din Γ“ (cu sau fără precizarea axiomelor sau regulilor prin care se deduce A)
$\Gamma \models A$	„A este consecință în sens semantic din Γ“, „A este consecință validă din Γ“ „A este adevărată în orice interpretare în care este adevărată Γ“.

Cele două relații pot fi generalizate pentru orice număr $m \geq 1$: $\{\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_m\} \vdash \{A\}$, $\{\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_m\} \models \{A\}$. Iată și o ilustrare simplă a acestor relații de consecință logică:

$\{A \cdot B \rightarrow C, \sim C\} \vdash \{\sim A \vee \sim B\}$,

$\{A \cdot B \rightarrow C, \sim C\} \models \{\sim A \vee \sim B\}$.

Prima relație se poate demonstra foarte ușor cu ajutorul câtorva reguli ale calculului natural pe care le presupun cunoscute:

1. $(A \cdot B) \rightarrow C$,
2. $\sim C$, $\therefore \sim A \vee \sim C$,
3. $\sim C \not\rightarrow \sim(A \cdot B)$,
4. $\sim(A \cdot B)$,
5. $\sim A \vee \sim B$.

A doua relație se demonstrează prin tabele de adevăr. Pentru următoarele sisteme de valori ale variabilelor

$A = 1, B = 0, C = 0$,

$A = 0, B = 1, C = 0$

se verifică condiția impusă prin definiție consecinței valide: $\{A \cdot B \rightarrow C, \sim C\} = 1$ și $\{\sim A \vee \sim B\} = 1$.

Cu aceasta consider conceptul de consecinţă logică suficient de precizat. Întrebarea care se pune mai departe este ce raporturi există între $\Gamma \vdash A$, $\Gamma \models A$ şi $\Gamma \rightarrow A$?

Aceste raporturi sunt fixate în logică cu ajutorul câtorva teoreme dintre care cea mai importantă este teorema deducţiei (Herbrand, 1930). Teorema se formulează în sens restrâns şi în sens generalizat:

1) Dacă $\Gamma \vdash A$, atunci $\vdash \Gamma \rightarrow A$.

2) Dacă $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_{m-1}, \Gamma_m \vdash A$, atunci $\Gamma_1, ..., \Gamma_{m-1}, \Gamma_m \rightarrow A$.

O teoremă similară se demonstrează şi cu privire la raportul dintre „$\models$“ şi „$\rightarrow$“:

3) $\Gamma \models A$ dacă şi numai dacă $\models \Gamma \rightarrow B$.

4) $\Gamma_1, ..., \Gamma_{m-1}, \Gamma_m \vdash A$, dacă şi numai dacă $\Gamma_1, ..., \Gamma_{m-1} \models \Gamma_m \rightarrow A$.

5) $\Gamma_1, ..., \Gamma_{m-1}, \Gamma_m \vdash A$ dacă şi numai dacă $\models \Gamma_1 \rightarrow (...(\Gamma_{m-1} \rightarrow (\Gamma_m \rightarrow A))...)$.

4. SISTEMUL AXIOMATIC ŞI CONCEPTUL DE SISTEM DEDUCTIV.

Fie L un limbaj formalizat şi Cn operaţia de consecinţă logică. Un sistem $S = \{L, Cn\}$ se va numi atunci sistem deductiv. Definit astfel, sistemul deductiv se pretează la o abordare pur algebrică. Tarski va introduce un concept mai slab de sistem deductiv: „se numeşte sistem deductiv, sau sistem închis, sau pur şi simplu sistem, orice mulţime de propoziţii care conţine toate consecinţele sale“ (69; 79). În loc de sistem deductiv întâlnim uneori noţiunea de „sistem de postulate“ ceea ce este cam acelaşi lucru. Toate problemele discutate până acum pot fi transferate asupra sistemelor deductive (precizez că orice sistem axiomatic este un sistem deductiv, nu şi invers). O serie de teoreme cu privire la sistemele deductive sunt demonstrate de Tarski din axiomele deja menţionate.

5. SISTEMUL AXIOMATIC ŞI CONCEPTUL DE TEORIE FORMALIZATĂ

Fie din nou L un limbaj formalizat şi T o teorie oarecare formulată în L. Sistemul T = {L, Cn, A} se numeşte *teorie formalizată*. A nu se confunda mulţimea axiomelor A care aparţin teoriei, cu mulţimea axiomelor logice presupuse de operaţia de consecinţă logică Cn. Sistemul deductiv S = {L, Cn} se mai numeşte şi „logica lui T". Din această cauză teoria T mai poate fi dată şi în forma T = {S, A} (A este aceeaşi mulţime de axiome). Dacă A = ∅ atunci S = T = {L, Cn, ∅}.

Conceptul de teorie formalizată poate fi aplicat atât în logică, cât şi în matematică. Şi într-un caz şi în celălalt putem alege ca axiome în S axiomele unui sistem neclasic. Mulţimea Cn (A), sistemul deductiv S şi teoria formalizată T se vor modifica şi ele ca atare. Diferitele teorii din matematica intuiţionistă pot fi privite ca alternative la matematica clasică obţinute tocmai prin modificarea structurii logice a acestor teorii.

Pentru ilustrarea conceptului de teorie formalizată în logică voi reproduce în cele ce urmează formalizarea dată de J. Lukasiewicz silogisticii aristotelice expusă în cartea sa *Aristotele's Sillogistic from the standpoint of modern formal logic* (Oxford, 1957). Am optat pentru acest exemplu din mai multe motive. Întâi pentru că avem ocazia să ne facem o idee mai clară despre limbajul Lukasiewicz pe care l-am discutat în primul capitol dar pe care nu l-am folosit niciodată până acum. Apoi, teoria lui Lukasiewicz permite o ilustrare clară şi elegantă a principalelor predicate metateoretice invocate în prima parte a acestui capitol. În sfârşit, apar aici câteva aspecte noi de natură să întregească imaginea de ansamblu asupra metodei axiomatice.

Expunerea se va face respectând strict structura teoriei formalizate (limbaj formalizat, sistem deductiv, axiomele teoriei). Cum este şi firesc, voi începe cu expunerea limbajului.

Lista de simboluri

1) p, q, r,... variabile propoziţionale,
2) x, y, z,... variabile pentru termeni,

3) N, K, C,... operatorii propoziționali „non", „și", „implică".
4) A, E, I, O operatori silogistici „toți ... sunt ...", „nici un ... nu este ...", „unii ... sunt ...", „unii ... nu sunt ..."

Reguli de formare

Noțiunea de expresie (formulă) este definită inductiv prin regulile:

R1. p, q, r,... și Axy, Exy, Ixy, Oxy sunt expresii,

R2. Dacă α și β sunt expresii atunci Nα, Kαβ, Cαβ, Eαβ vor fi de asemenea expresii.

Observație. Lukasiewicz definește silogistica aristotelică drept teoria operațiilor A, E, I, O în domeniul termenilor generali nevizi. Orice modificare în raport cu termenii sau cele patru operații iese din cadrele silogisticii aristotelice.

Sistemul deductiv

Deducția teoremelor care în cazul de față nu sunt altceva decât modurile silogistice valide se face cu ajutorul celor 14 tautologii propoziționale date mai jos și a regulilor de deducție aferente lor.

I. Cp Cqp
II. CCqr CCpq Cpr
III. CCp Cqr Cq Cpr
IV. Cp CNppp
V. CC Nppp
VI. CCpq CNq Np
VII. CCKpqr Cp Cqr
VIII. Cp CCKpqr Cqr
IX. CCsp CCKpqr CKsqr
X. CCKpqr CCsq CKpsr
XI. CCrs CCKpqr CKp CKqps
XII. CCKpqr CKp Nr Nq
XIII. CCKpqr CKNrq Np
XIV. CCKp Nq Nr CKprq.

Axiomele teoriei

1). Axx
2). Ixx
3).CKAyzAxyAxz (Barbara)
4).CKAyzIyxIxz (Datisi)

Definiții

D1. Exy = $_{df}$ NIxy

D2. Oxy = $_{df}$ NAxy

Reguli de deducție

RS. (regula substituției): dacă α este o teoremă orice substituție a variabilelor din α cu variabile de același tip va conduce tot la o teoremă (condiția este ca substituția să se facă peste tot la fel). Substituția lui p cu q (respectiv x cu y) se va nota „p / q" (respectiv „x / y") indicându-se de fiecare dată axioma sau teorema în care se face substituția.

RD. (regula detașării): dacă α și Cαβ sunt teoreme atunci β este teoremă. În demonstrații aplicarea acestei reguli se marchează cu „C" precedat de semnul „×".

RE. Secvența de simboluri NI se poate înlocui peste tot cu E, și invers.

RD: Secvența NA se poate substitui peste tot cu O, și invers.

Deducția teoremelor

VII. p/Ayx, q/Iyx, r/Ixz. × C4-5

5. CAyz CIyz Ixz

VI. y/x, z/x, x/y. × C1-6

6. CIxy Iyx (conversiunea propoziției I)

III. p/Ayz, q/Iyx, r/Ixz × C5-7

7. CIyx CAyz Ixz

7. y/z, z/y × C2-8

8. CAxy Ixy (subalternarea propoziției A)

II. q/Ixy, r/Iyx. × C6-9

9. CCp Ixy Cp Iyx

9. p/Axy. × C8-10

10. CAxy Ixy (conversiune per accidens)

6.x/y, y/x. -11

11. CIyx Ixy

VI. p/Iyx, q/Ixy. × C11-12

12. CNIxy NIyx

12. RE-13

13. CExy Eyx (conversiunea propoziției E)

VI. p/Axy, q/Ixy. × C8-14

14. CNIxy NAxy
    14. RE, RO-15
15. CExy Oxy (subalternarea propoziției E)
    X. p/Ayz, q/Iyx, r/Ixz. × C4-16
16. CCs Iyx CKAyzs/xz
    16. s/Ixy. X C6-17
17. CKAyz Ixy Ixz (Darii)
    16. s/Axy. × C10-18
18. CKAyz Axy Ixz (Barbari)
    8. x/y, y/x. -19
19. CAyx/yx
    16. s/Ayx. × C 19-20
20. CKAyz Ayx Ixz (Darapti)
    XI. r/Iyx, s/Ixy. × C11 - 21
21. CCKpq Iyx CKqp Ixy
    4. z/x, x/z -22
22. CKAyx Iyz Izx
    21. p/Ayx, q/Iyz, y/z. × C22-23
23. CKIyz Ayx Ixz (Disamis)
    17. z/x, x/z. -24
24. CKAyx Izy Izx
    21. p/Ayx, q/Izy, y/z. × C24-25
25. CKIzy Ayx Ixy (Dimaris)
    18. z/x, x/z. -26
26. CKAyx Azy Izy
    21. p/Ayx, q/Azy, y/z. × C26-27
27. CKAzy Ayx Ixz (Bramantip)
    XIII. p/Iyz, q/Ayx, r/Ixz. × C23-28
28. CKNIxz Ayx NIyz
    28. RE-29
29. CKExz Ayx Eyz
    29. x/y, y/x -30.
30. CKE yz Axy Exz (Celarent)
    IX. s/Exy, p/Eyx. × C13-31
31. CCKEyxqr CKExyqr
    31. x/z, q/Axy, r/Exz. × C30-32

32.CKEzy Axy Exz (Cesare)
XI. r/Exy, s/Eyx. × C13-33
33. CCKpq Exy CKqp Eyx
32. z/x, x/z. -34
34. CKExy Azy Ezx
33. p/Exy, q/Azy, x/z, y/z. × C34-35
35. CKA zy Exy Exz (Camestres)
30. z/x, x/z -36
36. CKEyx Azy Ezx
33. p/Eyx, q/Azy, x/z, y/z. × C36-37
37. CKAzy Eyx Exz (Camenes)
II. q/Exy, r/Oxy. × C15-38.
38. CCp Exy Cp Oxy.
38. p/KEyz Axy, y/z. × C30-39
39. CKEyz Axy Oxz
38. p/KEzy Axy, y/z. × C32-40
40. CKEzy Axy Oxy (Cesaro)
38. p/KAzy Exy, y/z. × C35-41
41. CKAzy Exy Oxy (Camestrop)
38. p/KAzy Eyx, y/z. × C37-42
42. CKAzy Eyx Oxz (Camenop)
XIII. p/Ayz, q/Iyx, r/Ixz. × C4-43
43. CKNIxz Iyx NAyz.
43. RE, RO. -44
44. CKExz Iyx Oyz
44. x/y, y/x. -45
45. CKEyz Ixy Oxz (Ferio)
31. x/z, q/Ixy, r/Oxz. × C45-46
46. CKEzx Ixy Oxy (Festino)
X. p/Eyz, q/Ixy, r/Oxz. × C45-47
47. CCs/xy CKEyzs Oxz.
47. s/Iyx. × C11-48
48. CKEyz Iyx Oxz. (Ferison)
31. x/z, q/Iyx, r/Oxz. × C48-49
49. CKEzy Iyx Oxz (Fresison)

50. x/y, y/x. -50
50. CAyx Ixy
47. s/Ayx. X 50-51
51. CKEyz Ayx Oxz (Felapton)
31. x/z, q/Ayx, r/Oxz. × C51-52
52. CKEzy Ayx Oxz (Fesapo)
XII. p/Ayz, q/Axy, r/Axz. × C3-53
53. CKAyz Oxz Oxy
53. RO-54
54. CKAyz Oxz Oxy
54. y/z, z/y. -55
55. CKAzy Oxy Oxz (Baroco)
XIII. p/Ayz, q/Axy, r/Axz. × C3-56
56. CKNAxz Axy NAyz
56. RO-57
57. CKOxz Axy Oyz
57. x/y, y/x . -58
58. CKOyz Ayx Oxz. (Bocardo)

Există câteva deosebiri esențiale între silogistica lui Aristotel şi formalizarea dată de Lukasiewicz. În primul rând Aristotel nu dispune de o teorie generală a deducției care în cazul de față este calculul propozițional bivalent. Demonstrarea validității modurilor silogistice se face prin reducerea acestora la modurile figurii I considerate moduri perfecte. Dintre acestea fundamentale sunt modurile *Barbara* şi *Celarent*. Modurile *Baroco* (fig. II) şi *Bocardo* (fig. III) nu se reduc direct la modurile figurii I, ci indirect, prin reducere la absurd. În ambele cazuri, a reduce înseamnă a arăta dependențele deductive ale modurilor respective față de modurile figurii I, în special față de *Barbara* şi *Celarent*. Or, trebuie spus că în axiomatizarea lui Lukasiewicz lucrurile stau exact invers. *Baroco* şi *Bocardo* nu numai că se deduc din *Barbara*, dar sunt singurele moduri deduse astfel. Curios este că până şi Barbari, subalternul lui Barbara, poate fi dedus în mod independent. Cel puțin din acest punct de vedere, noțiunea aristotelică de mod perfect cred că ar trebui revizuită.

Din totalul de 256 de moduri posibile, în silogistica aristotelică sunt valide doar 24, dacă luăm în considerare şi modurile subalterne.

Pentru a respinge ca nevalide restul de 232 de moduri silogis
Łukasiewicz va adăuga două axiome speciale, numite de el axiom
respingere şi două reguli de respingere:
1. CKAzy Axy Ixz
2. CKExy Exy Ixz
Regula de respingere prin substituţie: dacă β se obţine din α
substituţie şi α este respinsă, atunci şi β va fi respinsă.
Regula de respingere prin detaşare: dacă Cαβ este asertată şi β
respinsă, atunci şi α este respinsă.

Noţiunea de „respingere" devine astfel corelatul noţiun
„asertare" pe care am simbolizat-o cu „⊢". Este prima axiomatizar
care sunt deduse concomitent formule asertate (teoreme) şi resp
(nonteoreme). Următoarele formule pe care le reproduc
demonstraţie. sunt exemple de formule respinse.

3) Ixz
4) CExz Ixz
5) CKAzz Exz Ixy
6) CKAyz Exy Ixz
7) CKAzy Exy Axz
8) CKAzy Exz Oxy
9) CKAyz Exy Oxz
10) CKAyz Exy Exz

Pentru a demonstra că sistemul este consistent se interprete
variabilele pentru termeni prin variabile propoziţionale, iar expres
Axy, Ixy se interpretează prin KCxx Cyy. Mai exact, dacă Axy = Ix
KCxxCyy atunci toate axiomele şi teoremele devin tautol
propoziţionale. Tot prin metoda interpretării se demonstrează
sistemul este independent.

a) ***Independenţa axiomei*** 1: dacă A = K şi C = I, axiomele 2, 3 ş
vor fi verificate (adevărate), în schimb axioma 1 nu este verific
(Aoo = Koo = 0 pentru x = 0).

b) ***Independenţa axiomei 2:*** dacă A = C şi I = K, vor fi verific
axiomele 1, 3, 4 nu şi axioma 2 (Ioo = Koo = 0 pentru x = 0).

c) ***Independenţa axiomei 3:*** se interpretează operatorii N, K, C
mulţimea {0,1,2} astfel:

p	Np
0	1
1	0
2	0

K	0 1 2
0	0 0 0
1	0 1 1
2	0 1 1

C	0 1 2
0	1 1 1
1	0 1 1
2	0 1 1

Axiomele 1, 2, 4 sunt verificate, în schimb axioma 3 nu e ste verificată. Pentru x = o, y = 1, z = 2 se obține:

$CK_{12}\ A_{01}\ A_{02} = CK_{110} = C_{10} = 0$

d) ***Independența axiomei 4:*** dacă A = I = C, axiomele 1, 2, 3 sunt verificate iar axioma 4 neverificată (pentru x=1, y=0, z=0 se obține CKAyz Iyz Ixz=CKCyz Cyz Cxz=0).

Completitudinea aduce deja primele surprize. O serie de formule nu sunt demonstrabile din axiomele teoriei, deşi ele sunt adevărate în interpretarea dată pentru consistență (incompletitudine în sens restrâns). În mod special atrag atenția formulele:

1) CIxy CNAxy Ayx

2) CCNAxy Ayx Ixy

care legitimează echivalența:

3) Ixy = CNAxy Ayx

Dacă transcriem implicația din membrul drept al echivalenței, prin disjuncție şi negație obținem următorul rezultat: „unii x sunt y" este echivalent cu „toți x sunt y sau toți y sunt x". Este de departe vizibil că această propoziție nu mai este adevărată. Să înțelegem de aici că sistemul este consistent în unele interpretări şi inconsistent în altele? Pentru a rezolva această problemă voi anticipa puțin lucrurile şi voi aduce în discuție conceptul semantic de *model*. Definițiile care urmează sunt reformulate după Wang Hao (75; 22).

Definiția 1. Un sistem de axiome este consistent dacă există un model pentru expresiile sistemului. Reamintesc că prin model se înțelege acea interpretare pentru care axiomele sistemului devin propoziții adevărate.

Definiția 2. Două modele ale unui sistem S sunt izomorfe dacă între elementele lor există o corespondență biunivocă astfel că orice formulă din S este adevărată într-unul din modele dacă şi numai dacă ea este adevărată şi în celălalt model.

Definiția 3. Dacă fiecare pereche de modele ale unui sistem axiomatic S sunt izomorfe între ele sistemul este categoric.

Cu aceste precizări să revenim la rpoblema noastră. Întrucât axiomatizarea silogisticii pe care o discutăm nu este completă, există cel puţin o formulă A astfel că A nu poarte fi demonstrată ca teoremă. În plus, A este adevărată în unele modele şi falsă în altele, iar aceste modele nu pot fi izomorfe. Nefiind izomorfe, sistemul nu este categoric (printr-o teoremă specială se demonstrează că orice sistem categoric este totodată şi un sistem complet).

Odată stabilt că sistemul nu este complet, se pune problema dacă aceată incompletitudine este una de principiu sau dacă nu cumva ea este rezultatul unui viciu de construcţie? Cu alte cuvinte, poate fi perfecţionată această axiomatizare în aşa fel încât ea să devină completă? J. Slupecki va demonstra că sistemul poate deveni complet dacă se adaugă o regulă specială de respingere. Regula lui Slupecki se enunţă în felul următor: dacă α şi β sunt expresii simple negative iar γ este o expresie elementară, atunci dacă $C\alpha\gamma$ şi $C\beta\gamma$ sunt expresii respinse, $C\alpha\ C\beta\gamma$ va fi de asemenea respinsă. Expresiile simple sunt expresiile Axy, Ixy, Exy, Oxy dintre care primele două sunt simple pozitive, iar ultimile două simple negative. Expresie elementară este atunci orice expresie simplă şi orice expresie de tipul $C\alpha_1C\alpha_2C\alpha_3...$ $C\alpha_{n-1}\ C\alpha_n$ unde α_i este o expresie simplă. Analogia cu legea silogistică potrivit căreia din două premise negative nu rezultă nici o concluzie este evidentă. Cu această nouă regulă de respingere sistemul devine complet[1].

6. CONCLUZII

Importanţa unei metode este apreciată după importanţa problemelor pe care ea le rezolvă. Atât în logică cât şi în matematică problemele rezolvate axiomatic sunt fundamentale. Să nu uităm că începuturile logicii moderne sunt legate nu doar de aplicarea limbajelor simbolice ci şi a metodei axiomatice. Chiar dacă din punct

[1] Pentru detalii suplimentare privind axiomatizarea silogisticii, vezi şi cartea lui S. Vieru *Axiomatizări şi modele ale sistemelor silogistice* (Editura Academiei, Bucureşti 1975).

de vedere metodologic logica arată astăzi cu totul altfel, metoda axiomatică rămâne totuşi una din metodele ei de bază. În încheierea acestuui capitol, voi, puncta pe scurt câteva din prpoblemele mai importante ale logicii care sunt rezolvabile axiomatic.

1) *Problema deciziei*. Există în momentul de faţă un sens axiomatic al termenului decizie, după cum există unul algoritmic. Pentru că voi relua această problemă în capitolul următor, mă rezum aici la a spune că a decide din punctul de vedere axiomatic înseamnă a stabili pentru orice formulă dată dacă este sau nu teză logică. După cum s-a văzut, există sisteme în acre sunt demonstrabile toate formulele valide şi sunt respinse toate formulele nevalide. Despre un astfel de sistem spunem că este *decidabil*. Se înţelege că nu toate sistemele sunt decidabile pentru că nu toate sunt complete. Conform teoremei lui Gödel de incompletitudine, o serie de sisteme sunt principial incomplete şi deci indecidabile. O astfel de incompletitudine ridică nu doar probleme logice, ci şi filozofice cum este problema raportului dintre adevăr şi demonstrabilitate. Am discutat în *Introducere* câteva din consecinţele teoremei lui Gödel asupra programului logicist de fundamentare a matematicii, care poate fi privit şi ca un program filozofic.

2) Probleme legate de definire. Sistemul axiomatic poate servi ca mijloc de definire şi chiar de construcţie. Un concept intuitiv, dar imprecis, cum este cel de mulţime se defineşte axiomatic: este mulţime doar ceea ce satisface axiomele date şi propoziţiile deduse din aceste axiome. Ceva asemănător se poate spune şi în geometrie despre conceptul de spaţiu. Orice modificare consistentă a axiomelor se răsfrânge mai mult sau mai puţin esenţial asupra obiectului definit. Unele axiome se dovedesc a avea din acest punct de vedere un rol hotărâtor. Modificarea axiomei V a paralelelor a dus la un alt concept de spaţiu despre care putem spune că este definit (şi chiar construit) axiomatic. Logica intuiţionistă va produce un efect similar asupra conceptelor de adevăr şi de lege logică.

3) Problema paradoxelor. În sensul său cel mai general paradoxul înseamnă contradicţia între două propoziţii A şi ~A astfel că din supoziţia lui A rezultă ~A şi din supoziţia lui ~A rezultă A. Paradoxul lui Cantor, paradoxul lui Russell, al lui Berry, Richard, Grelling, sunt doar câteva din paradoxele care au marcat criza matematicii de la

începutul acestui secol. În textele reproduse după P. S. Novicov am văzut ce consecinţe are o contradicţie asupra unei teorii fie ea din matematică fie din logică. Cu toate acestea, s-a întâmplat un lucru surprinzător. Nici una din teoriile invocate nu a fost pusă în pericol prin efectul paradoxului încât cine nu a vrut să ia în serios acest pericol nu a întâmpinat practic nici o dificultate. Va trebui să distingem, aşadar, între contradicţia paradoxală şi contradicţia simplă, trivială. Numai contradicţia simplă se propagă în tot corpul teoriei, contradicţia paradoxală are un efect limitat. În ultima vreme aceste probleme fac obiectul unei noi direcţii în cercetarea logică - logica paraconsistentă (Newton da Costa).

4) Probleme legate de organizare. Sistemul axiomatic este forma cea mai tare de organizare deductivă a unei teorii. Organizarea axiomatică are la bază criterii de eficienţă şi nu doar de ordin estetic, cum s-a mai spus uneori. Una este să stabileşti adevărul unei propoziţii în mod empiric (inductiv), şi alta demonstrativ. Apoi demonstraţia axiomatică are acces la adevăruri pe care altfel nu le-am putea dobândi. Cu toate acestea, în ştiinţele factuale nu avem de a face cu metoda axiomatică, cel puţin nu în forma pe care am descris-o aici. Este drept că şi în ştiinţele factuale intervin principii şi aceste principii nu se demonstrează. Ele sunt însă confirmate de toate faptele ce cad în sfera de interes a teoriei respective. Cu ajutorul principiilor se demonstrează legile care mai departe sunt aplicate în rezolvarea diferitelor probleme. Trebuie spus că în logica modernă intervine atât ideea de axiomă cât şi cea de lege şi principiu însă trebuie lămurit care este raportul dintre lege şi principiu aici.

5) Probleme cu caracter metalogic. Am examinat în acest capitol câteva dintre conceptele metalogice care se definesc cu ajutorul sistemului axiomatic. Conceptul de teorie formalizată, reprodus după Rasiowa Sikorski (61), viza teoriile matematice însă după părerea mea el poate fi foarte bine adaptat şi la logică. Că unele din aceste concepte se pot studia şi din punct de vedere matematic este foarte adevărat, însă, nu trebuie uitat că principala lor destinaţie o constituie rezolvarea de probleme logice.

CAP. IV

ALGORITMII ŞI LOGICA

O serie de probleme logice atât cu caracter semantic cât şi sintactic îşi găsesc rezolvarea pe cale algoritmică, prin calcul. Aceasta a şi făcut ca logica modernă să fie denumită adesea „algoritmică", iar unele dintre teoriile ei de bază să fie denumite drept „calcule". Pe lângă sensul algoritmic există la ora actuală şi sensuri nealgoritmice ale termenului „calcul", cum ar fi „calculul axiomatic", de exemplu, sau „calculul natural". „Vom utiliza mereu ca sinonime - precizează P.S. Novicov - termenii formalism şi calcul" (55; 26).

În orice calcul, fie el matematic sau logic, dispunem de anumite reguli care prescriu modul de realizare al unor operaţii şi care aplicate într-o anumită ordine conduc, în mod univoc, la un anumit rezultat. Împreună, regulile de calcul şi ordinea aplicării lor, formează algoritmul.

Datele ce urmează a fi prelucrate algoritmic nu sunt la întâmplare, lipsite de legături, ci apar ansamblate în enunţul anumitor probleme. De fapt, ceea ce se rezolvă algoritmic sunt problemele şi orice algoritm concret este definit în raport cu o categorie sau clasă de probleme. Din aceste motive voi începe prezentarea cu câteva aspecte generale legate de conceptul de problemă încercând să surprind totodată şi unele aspecte de ordin logic care intervin aici.

I. CONCEPTUL DE PROBLEMĂ ÎN LOGICĂ ŞI MATEMATICĂ

În primul rând este important să cunoaştem când un sistem de date se constituie într-o problemă? Un răspuns la această întrebare îl găsim în cartea lui Gh. Enescu *Fundamentele logice ale gândirii*: „Vom spune că avem o problemă dacă: 1) dispunem de o mulţime (finită) de informaţii numite *date*, 2) *se cere* să aflăm pe baza datelor alte informaţii numite *soluţia problemei*" (21; 277).

Aşadar, o problemă se compune, într-o accepţiune foarte largă. desigur, din ceea ce „se dă" şi ceea ce „se cere" cu precizarea că ceea ce se cere este întotdeauna funcţie de ceea ce se dă. Relativ la orice problemă autorul distinge între *metoda de rezolvare* (care poate fi dată sub formă de algoritm) şi *rezolvarea efectivă* sau *procesul de rezolvare* care constă în aplicarea metodei la condiţiile determinate ale problemei.

Dacă problema de care ne ocupăm are un caracter individual pronunţat în sensul că ea prezintă un coeficient sporit de dificultate. atunci ceea ce prezintă interes este rezolvarea propriu-zisă şi ca atare soluţia problemei. Dacă se constată, în schimb, că problema face parte dintr-o clasă de probleme de acelaşi tip, atunci de interes devine şi metoda de rezolvare care mai departe poate fi studiată separat. Foarte multe situaţii din insoria matematicii (şi nu numai) pot fi asimilate acestei scheme.

Pentru ca o problemă să poată fi rezolvată algoritmic este necesar ca sistemul de date prin care ea se formulează să satisfacă anumite condiţii. Gh. Enescu a transferat asupra problemei unele din proprietăţiile sistemului axiomatic. Astfel, datele trebuie să fie în primul rând necontradictorii. Este de presupus că dacă această cerinţă nu este satisfăcută, algoritmul conduce la rezultate întâmplătoare, sau nu conduce practic la nici un rezultat. Este vizibilă aici analogia cu principiul implicativ „din contradicţie rezultă orice". În al doilea rând, datele trebuie să fie independente ceea ce corespunde caracterului necesar şi neredundant. Dacă această condiţie nu este satisfăcută s-ar putea să avem nu numai una, ci mai multe probleme (în cel mai bun caz). În sfârşit, datele trebuie să fie complete, în sensul de suficiente. Această condiţie se îndepărtează întrucâtva de semnificaţia sa axiomatică.

Ne dăm seama că deşi „împrumutate", aceste condiţii sunt totuşi esenţiale pentru aplicarea algoritmului. La rândul său, sistemul axiomatic a fost asociat cu ideea de calcul, însă, după cum vom vedea, între cele două există deosebiri esenţiale.

Studiul logic al problemelor impune clasificarea acestora după câteva criterii mari cum ar fi forma problemei, tipul de răspuns, modul de rezolvare, caracterul ei reductibil sau nereductibil şi multe altele.

Mă voi opri pe scurt la câteva dintre ele. După cum arată Kleene (41) o problemă poate fi dată în formă interogativă sau nu. Cele mai multe probleme în formă interogativă sunt de tipul „care?" („care este soluția ecuației...?", „care este valoarea expresiei...?", „care este forma normală distinctivă a formulei...?", ş.a.). După cum se observă acerst tip de problemă caracterizează atât logica cât şi matematica. Intervin însă de multe ori şi probleme în formă interogativă de tipul „cât?", „cum?", „există?",ş.a. Iată şi câteva exemple: „cât este sin x?", „cum este funcţia f ?", „există o soluţie reală pentru ecuaţia E?". Acest „există" din enunţul ultimei probleme nu este lipsit la rândul lui de... probleme! În matematica intuiţionistă ceva există în măsura în care el poate fi construit, adică dat efectiv. Se înţelege, deci, că rezolvarea algoritmică satisface în cel mai înalt grad exigenţele intuiţioniste relativ la problema existenţei. De altfel, A. A. Markov - iniţiatorul constructivismului (o variantă a intuiţionismului matematic) - recunoaşte deschis că „dezvoltarea direcţiei constructiviste s-a produs pe baza precizării, realizate în anii 30, a noţiunii de algoritm care a epurat această noţiune de neclarităţi şi subiectivism" (50; 370). Or, în matematica clasică intervin adeseori situaţii în care un procedeu doar indică existenţa unui obiect fără să-l poată efectiv construi. Acesta este şi cazul aşa-numitului „raţionament diagonal" imaginat de G. Cantor despre care vom avea ocazia să vorbim în ultimul capitol.

În sfârşit, o serie de probleme matematice se prezintă în formă funcţională. A rezolva problema înseamnă aici a calcula (sau, mai general, a găsi) valoarea funcţiei pentru anumite valori ale argumentelor. Noţiunea de calculabilitate este strâns legată de noţiunea de *recursie*.

Am spus mai sus că problemele se clasifică şi după tipul de răspuns pe care îl implică. O importantă categorie de probleme sunt cele la care se poate răspunde prin „da" sau „nu", numite de aceea şi probleme de tipul „da - nu". Răspunsul prin „da" ar putea fi asociat predicatului logic „adevărat", iar răspunsul prin „nu" predicatului „fals". Iată şi două exemple în acest sens:

„Are funcţia f valori în intervalul $(-\infty, 2]$?"

„este adevărat că funcţia f are valori în $(-\infty, 2]$?"

Răspunsurile „da - nu" pot fi considerate semnificaţii semantice asemenea semnificaţiilor „adevăr - fals" pentru acele probleme care se compun din alte probleme. Am în vederi compunerea în genul celor realizate prin operatorii propoziţionali „non", „şi" „sau". etc. Răspunsul la o problemă compusă este funcţie atunci de răspunsul la problemele componente. Mă voi rezuma doar la două exemple simple date de operatorul negaţiei şi conjuncţiei:

A	~A
Da	Nu
Nu	Da

A•B	Da	Nu
Da	Da	Nu
Nu	Nu	Nu

Caracteristic pentru problemele din această categorie este faptul că sunt subsumate în diferite maniere terţului exclus. La fel ca în logica propoziţiilor pot interveni şi probleme care să se extragă terţului exclus în sensul că ele nu se mai asociază unui răspuns prin „da" sau „nu", ci necesită o serie de nuanţări. Problema lui Fermat dacă există patru numere naturale x, y, z, n astfel că $x^n + y^n = z^n$, ($n > 2$) este problemă tipică în acest sens. Astfel de probleme ne obligă să luăm în în considerare nu doar valoarea ci şi limitele metodei algoritmice.

Organizarea logică a problemelor a fost dusă până la capăt de A. N. Kolmogorov care a imaginat un fel de *calcul* sau de *logică a problemelor*, după modelul calculului propoziţional. „Paralel cu logica teoretică, scrie Kolmogorov, care sistematizează schemele de demonstrare a adevărurilor teoretice, se mai pot sistematiza soluţiile problemelor, de exemplu ale problemelor de construcţie geometrică. Principiul silogismului îi corespunde aici, de exemplu următorul principiu: dacă putem reduce soluţia lui b la soluţia lui a şi soluţia lui c la soluţia lui b, atunci putem reduce soluţia lui c la soluţia lui a (...). Astfel se obţine pe lângă logica teoretică un nou *calcul*, al problemelor"(44; 359).

Faptul că problemele se pot compune între ele cu ajutorul cuvintelor de legătură este fără îndoială important sub aspect logic. însă rezultatul lui Kolmogorov are o semnificaţie mult mai profundă. Din punct de vedere formal calculul lui Kolomogorov este izomorf calculului propoziţional intuiţionist (în varianta lui Heyting). Dar dacă

problemele aparţin matematicii iar organizarea logică a acestor probleme corespunde logicii intuiţioniste, urmează de aici neapărat că logica intuiţionistă este o logică specifică gândirii matematice? Voi răspunde acestei întrebări în finalul lucrării după ce vor fi examinate şi alte aspecte legate de aplicarea algoritmilor în logică. Deocamdată reţinem că logica contribuie din plin la precizarea conceptului de problemă fapt ce a dus la o nouă dezvoltare a logicii şi anume *logica interogativă* (a se vedea în acest sens cartea lui C. Grecu *Logica interogativă şi aplicaţiile ei*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1982).

2. CONCEPTUL DE ALGORITM (ASPECTE GENERALE)

Să considerăm următoarea problemă: fiind date numerele 244 şi 86 să se găsească cel mai mare divizor comun. Evident, problema are toate particularităţile pe care le-am discutat mai sus şi poate fi soluţionată algoritmic. Algoritmul de rezolvare a acestui gen de probleme, cunoscut şi sub numele de „algoritmul lui Euclid", se compune din următoarele reguli sau instrucţiuni:

1) Se ordonează cele două numere conform relaţiei „>" (mai mare).

2) Se împarte numărul mai mare prin numărul mai mic. Dacă restul împărţirii este zero algoritmul se opreşte, iar numărul mai mic este rezultatul căutat. Dacă restul este diferit de zero, algoritmul se continuă prin regula:

3) Se împarte împărţitorul la rest până se ajunge la o împărţire în care restul este zero. Ultimul rest diferit de zero este rezultatul căutat.

Iată şi aplicarea concretă a algoritmului la problema pe care am formulat-o mai sus:

244 : 86 = 2 rest 72

86 : 72 = 1 rest 14

72 : 14 = 5 rest 2

14 : 2 = 7 rest 0.

Conform cu regula 3), cel mai mare divizor comun al celor două numere este 2. Desigur, algoritmul poate fi descris într-o formă pur matematică, însă acest lucru, pentru moment, este mai puţin

important. Ceea ce interesează, deocamdată, este că exemplul reprodus permite evidenţierea câtorva caracteristici generale ale algoritmului valabile atât pentru matematică cât şi pentru logică. De fapt, logica nu aplică decât cu foarte puţine excepţii algoritmi din matematică însă, unele dintre procedee şi metodele de rezolvare din logică prezintă aceleaşi caracteristici cu algoritmii din matematică. Asupra acestui aspect voi reveni, deocamdată reţinem că orice algoritm se caracterizează prin:

1) *Caracter discret.* Algoritmul se desfăşoară sub forma unei succesiuni de operaţii distincte între ele, prescrise prin reguli de asemenea distincte. Ordinea operaţilor într-un algoritm este riguros determinată.

2) *Caracter finit.* Numărul operaţiilor prin care se realizează algoritmul este întotdeauna finit, deşi el poate fi uneori foarte mare. Utilizarea tehnicilor moderne de calcul a făcut cu această particularitate a algoritmului să arate astăzi cu totul altfel.

3) *Caracter determinat.* În fiecare etapă a aplicării algoritmului, datele obţinute sunt univoc determinate în raport cu datele anterioare. Această „determinare" poate fi văzută şi în raport cu problemele ce urmează a fi rezolvate pentru că fiecare algoritm este destinat unei clase determinate de probleme şi nu rezolvării de probleme în general.

4) *Caracter de masă.* Algoritmul se aplică unei clase potenţial infinite (deşi determinate) de probleme. Există, de exemplu, o mulţime potenţial infinită de probleme de tip „*a* divide *b*".

5) *Caracter formal.* Într-un algoritm importantă este corelarea formală a datelor nu şi conţinutul lor propriu-zis.

6) *Caracterul mecanic.* Aplicarea regulilor şi implicit efectuarea operaţiilor în algoritm sunt întotdeauna la fel. Ceea ce diferă este doar numărul operaţiilor care nu poate fi cunoscut înainte şi care depinde de problema ce urmează a fi rezolvată. Această particularitate explică posibilitatea realizării algoritmului cu ajutorul maşinii în baza operaţiei de programare (în principiu orice problemă rezolvabilă algoritmic este programabilă).

Ne putem întreba acum dacă aceste proprietăţi ale algoritmului sunt valabile şi pentru deducţia axiomatică? Cred că nu este cazul să mai insist că cel puţin unele dintre aceste proprietăţi sunt cu totul

străine metodei axiomatice. S-ar putea spune, de exemplu, că deducția axiomatică are caracter mecanic? sau de masă? Probabil că denumirea de „calcul axiomatic" se datorează faptului că și deducția matematică intervin reguli, deși teoremele se deduc nu se calculează. Cu toate înrudirile lor, cele două operații sunt totuși destul de diferite.

Trebuie spus că până în deceniul trei al acestui secol nu a existat un concept general de algoritm ci numai algoritmi concret definiți în raport cu anumite categorii se probleme din matematică. Interes special prezentau algoritmii în care operațiile puteau fi reduse, după un număr finit de pași, la operațiile de bază ale aritmeticii. Începând cu anul 1930 o serie de autori (E.Post, A.Markov, A.Church, A.Turing, s.a.) au elaborat conceptul general de algoritm contribuind astfel din diferite puncte de vedere la precizarea noțiunii intuitive. În esență aceste definiții s-au dovedit până la urmă a fi echivalente.

O interesantă generalizare a algoritmului a fost dată prin așa numita „problemă a cuvintelor". Ea a luat naștere în diferite sectoare ale algebrei moderne cum este teoria sistemelor asociative sau teoria grupurilor însă importanța sa depășește cu mult cadrul acestor teorii.

Elaborarea conceptului general de algoritm legitimează următoarea întrebare: se pot găsi algoritmi concreți în baza cărora să se rezolve orice problemă matematică nerezolvată încă? Dacă răspunsul la această întrebare ar fi pozitiv, speranța leibniziană cu privire la rezolubilitatea algoritmică (prin calcul) ar deveni compatibilă cel puțin în raport cu matematica. Insuccesele cu care s-au soldat nenumăratele tentative de-a răspunde pozitiv acestei întrebări au condus în final la idea incompatibilității de principiu în ceea ce privește rezolvarea algoritmică a unora dintre problemele matematice. Altfel spus, pentru o serie de probleme din matematică nu numai că nu există astfel de algoritmi, dar nici în principiu ei nu pot exista. Asemenea afirmații sunt însoțite astăzi de riguroase demonstrații și constituie în raport cu problemele respective rezultate de mare interes matematic și teoretic în general.

3. ALGORITMII ÎN LOGICĂ

Logicienii au observat, afirmă Gr. Moisil, că „putem întrebuinţa calculul chiar dacă avem ţeluri pur logice. Ei au creat o logică algoritmică, realizarea visului leibnizian de caracteristică universală" (51; 48). De fapt, ideea de algoritm apare mult mai devreme în logică şi chiar într-o formă destul de avansată. Reimondus Lullus este cel care imaginează în *Ars magna et ultima* (1300) un procedeu mecanic pentru obţinerea judecăţilor prin aplicarea unor reguli mecanice de combinare a termenilor. În esenţă, procedeul lui Lullus constă în a combina mecanic „principiile" sau „termenii principali" pe care îl studiază în prima parte a *Marii arte* intitulată de el *Alphabetum*. În genere, „arta" lui Lullus conţine ideea de alfabet. limbaj, interpretare şi, bineînţeles, calcul. Tot de numele lui se leagă şi prima „maşină logică" în sensul de maşină de calcul.

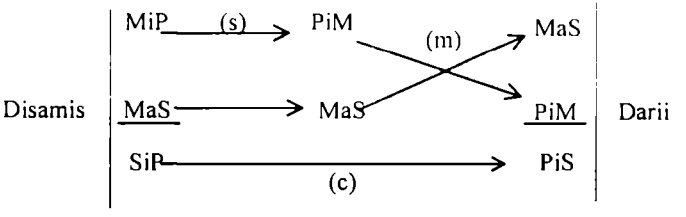
Evident, figura centrală în întreaga preistorie a logicii matematice rămâne Leibniz. Aşa cum am menţionat şi în primul capitol el proiectează un vast program de reformă a ştiinţelor în care o atracţie deosebită exercită pentru logicieni ideile de *characteristica universalis* şi de *calculus ratiocinator*. Ştiinţa astfel concepută urma să poarte numele de *mathesis universalis*.

Văzute în contextul epocii lor, cercetările lui R. Lullus şi G. Leibniz nu s-au bucurat de un succes prea mare şi au trecut drept extravaganţe fără o finalitate practică sesizabilă. Numai odată cu apariţia logicii simbolice aceste idei au putut fi valorificate şi apreciate în adevărata lor lumină. De altfel, B. Russell i-a dedicat lui Leibniz o monografie în care recunoaşte influenţa acestuia atât în ceea ce priveşte concepţia de ansamblu cât şi în unele detalii tehnice.

Rămânând în planul abordărilor istorice voi ilustra şi o altă situaţie logică în care este anticipată oarecum ideea de algoritm. Este vorba de procedeul reducerii modurilor silogistice cu ajutorul cuvintelor mnemotehnice introduse de medievali. După cum se ştie. aceste cuvinte au rolul de a indica pentru fiecare mod în parte: 1) tipul premiselor şi concluziei, 2) modul din figura I la care se reduce, 3) operaţiile prin care se realizează reducerea şi ordinea efectuării lor. Pentru exemplificare să luăm modul *Disamis* din figura III. Fiecare

literă din acest mod are o semnificație precisă iar unele dintre ele au chiar funcție de regulă. Să le examinăm pe rând:
D = modul din fig.1 la care se reduce Disamis este Darii,
i = majora este particular afirmativă,
s = majora se converteşte simplu,
a = minora este universal afirmativă,
m = premisele se comută,
i = concluzia este particular afirmativă,
s = concluzia se converteşte simplu.

Aplicate întocmai, acele reguli îl reduc pe Disamis la Darii reducere care are toate particularitățile algoritmului examinate în paragraful anterior.



Prin aceste cuvinte mnemotehnice medievalii dau silogisticii o tentă algoritmică în timp ce la Aristotel ea avea o organizare mai degrabă axiomatică.

Apariția logicii simbolice a sporit considerabil numărul problemelor rezolvabile algoritmic. Dacă avem în vedere limbajele simbolice şi formalizate, punctul în care logica modernă se distanțează cel mai mult de logica tradițională, atunci putem lua în considerare următoarele categorii de probleme.
1) Este o anumită secvență de simboluri din alfabet formulă?
2) Dacă este formulă atunci este ea demonstrabilă?
3) Se poate spune despre o succesiune finită de formule că este demonstrație?
4) Este o formulă anume lege logică?
5) Dacă nu este lege logică care este totuşi starea ei logică?

Prima din problemele enumerate se rezolvă printr-un algoritm special numit de M.Târnoveanu „algoritmul de recunoaştere a

formulelor bine formate". Celelalte probleme se rezolvă de la caz la caz în funcţie de teoriile avute în vedere.

4) ALGORITMUL ŞI PROBLEMA DECIZIEI

Am spus de mai multe ori că problema deciziei este problema numărul unu a logicii moderne, iar în capitolul II am dat câteva din formulările mai importante ale problemei pentru logica predicatelor. Voi relua aici discuţia dintr-o perspectivă ceva mai largă încercând să aduc şi alte precizări.

Termenul „decizie" circulă astăzi în două sensuri - algoritmic şi axiomatic. Din punct de vedere algoritmic a decide înseamnă a găsi după un număr finit de paşi valoarea formulei. S.C.Kleene va generaliza acest sens la orice clasă de probleme de tipul „da - nu". „Să considerăm, scrie Kleene, o mulţime infinit numărabilă de probleme matematice sau logice la care se poate răspunde prin „da" sau „nu". Există o metodă sau procedeu prin care se poate răspunde la oricare din problemele în cauză după un anumit număr de paşi?" (41; 223). Şi mai departe: „Dacă un astfel de procedeu există el este numit *procedeul de decizie* sau *algoritmul* pentru clasa de probleme dată". Iată şi câteva din exemplele cu care Kleene ilustrează problema deciziei pentru matematică:

1) Există un procedeu de decizie pentru clasa de probleme „*a* divide *b*"?

2) Există un procedeu de decizie pentru a determina dacă ecuaţia $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_{n-1} x + a_n = 0$, $(a \neq 0, n > 0)$, are soluţii raţionale?

Relativ la un sistem formal S, Kleene exemplifică următoarele categorii de probleme:

1) Este o anumită construcţie formală în sistem formulă?

2) Este o anumită succesiune finită de formule demonstraţie?

3) Este o formulă anume demonstrabilă?

Prima şi a doua problemă se rezolvă relativ simplu în sensul că pentru fiecare situaţie se verifică dacă definiţiile conceptelor de formulă şi demonstraţie se aplică respectivelor situaţii sau nu. A treia este însă radical diferită (sau „netrivială", cum se exprimă Kleene). Ea

este cunoscută sub numele de „problema deciziei pentru sistemele formale".

Dacă pentru o clasă de probleme date există un procedeu de decizie spunem că acea clasă este decidabilă, în caz contrar, ea este indecidabilă. Predicatele „decidabil", „indecidabil" se aplică claselor, problemelor şi expresiilor (în logică), condiţiile rămânând aceleaşi.

Sistemul axiomatic poate rezolva (cel puţin în parte) problema deciziei, de aceea, se impune să luăm în considerare şi al doilea sens al termenului „decizie", ~~cel axiomatic~~ cel algoritmic. El a fost introdus de Gödel în celebrul său memoriu din 1931. În esenţă, problema lui Gödel era de a şti dacă sistemele formale de tipul *Principiei Mathematica* sunt suficient de puternice pentru „a decide asupra oricărei probleme matematice ce poate fi formal reprezentată în sistem". (29; 327). Ce înseamnă aici a decide? Înseamnă a determina pentru o formulă oarecare dacă este sau nu demonstrabilă cu alte cuvinte dacă respectiva formulă este sau nu teoremă în sistem. De ce spun că decizia axiomatică este o decizie limitată (sau parţială)? Pentru că dacă o formulă s-a dovedit a nu fi teoremă, noi nu putem şti care este totuşi starea ei logică (este ea contradicţie? este cel puţin realizabilă?). Dar lucrul cel mai important este că noi nu putem şti dacă pentru o formulă arbitrară există realmente o demonstraţie în sistem. Ar trebui să dispunem şi aici de un algoritm dar atunci decizia algoritmică devine o condiţie pentru decizia axiomatică. Cel puţin acesta este sensul definiţiei pe care o dă A. Church: „Problema deciziei pentru un sistem logic este problema găsirii unui procedeu efectiv sau algoritm, un *procedeu de decizie*, prin care pentru o formulă arbitrară a sistemului, este posibil a determina dacă ea este sau nu teoremă (şi dacă este teoremă a obţine o demonstraţie pentru ea)". (13; 99).

Să presupunem că un asemenea algoritm există. Conform definiţiei lui Church problema deductibilităţii se reduce la o simplă problemă de calcul ceea ce din punct de vedere logic nu este tocmai clar. Fiecare teoremă îşi are propriul său mecanism de demonstrare care nici pe departe nu se reduce la aplicarea mecanică a unor reguli. Este drept că începând cu Wang Hao foarte mulţi autori au încercat să algoritmizeze anumite tipuri de deducţie axiomatică (să „maşinizeze" logica) însă rezultatele sunt destul de modeste.

Cum trebuie să înţelegem atunci definiţia lui A. Church? Această definiţie presupune două condiţii care în textul reprodus nu apar exprimate: 1)sistemul la care ne referim este complet, şi 2)există un concept de validitate pentru formulele sistemului respectiv. Dacă printr-un procedeu oarecare (semantic sau sintactic) se dovedeşte că o formulă este validă atunci ea estre teoremă întrucât sistemul este complet (orice formulă validă este teoremă în sistem şi invers). Cel puţin în formularea sa generală problema deciziei se dovedeşte astfel rezolvabilă.

Nu întotdeauna cele două condiţii sunt realizabile în totalitate. S-ar putea să nu dispunem de un concept specific de validitate cum s-a întâmplat în logica modală sau ca sistemul să nu fie complet. Nefiind complet, se înţelege că el nu este decidabil. Incompletitudinea sistemului axiomatic al logicii predicatelor l-a condus pe A. Church la demonstrarea indecidabilităţii algoritmice a logicii predicatelor. A. Tarski va elabora la rândul lui o teorie generală a indecidabilităţii.

În concluzie, o mulţime M erste decidabilă relativ la o proprietate F dacă şi numai dacă, în baza unui procedeu oarecare, pentru orice $x \in M$ noi putem alege (decide) între F(x) şi ~F(x). Această formulare generală a problemei deciziei se poate particulariza mai departe după a) natura elementelor lui M, b) proprietatea F, şi c) procedeul de decizie.

5. PROBLEMA DECIZIEI ÎN LOGICA PROPOZIŢIILOR

Logica propoziţiilor este decidabilă în toate sensurile discutate mai sus (sintactic şi semantic, algoritmic şi axiomatic). Decizia semantică constă în a construi matricea formulei prin care se determină valoarea acestei formule pentru diferitele valori ale variabilelor. Denumirea de „calcul matriceal" se datorează faptului că în stabilirea matricilor se aplică reguli de adevăr în baza cărora valoarea formulei se calculează aşa cum se calculează şi valoarea funcţiilor. În definitiv, matricile definesc funcţii de adevăr iar decibilitatea logicii propoziţiilor se bazează tocmai pe calculabilitatea acestor funcţii. Trebuie totuşi precizat că aici avem de-a face cu un

calcul logic diferit de calculul matematic uzual (se aplică la entități logice și se realizează într-un simbolism specific logicii). Chiar dacă pe anumite porțiuni se poate utiliza limbajul aritmetic, calculul aritmetic nu poate îndeplini în totalitate funcțiile calculului logic.

Simplu și eficient, calculul matriceal nu este lipsit de anumite limite. El poate fi folosit cu succes când numărul variabilelor propoziționale este relativ mic însă devine impracticabil când numărul acestora crește. Pentru o formulă cu 5 variabile ar trebui construită o matrice cu 32 de linii (numărul de linii într-o matrice este 2^n unde n este numărul variabilelor. În asemenea situații se folosesc procedee simplificate ce constau în înlocuirea în formulă a valorii variabilelor și în aplicarea așa numitelor „legi de posibilitate". Aceste legi redau valoarea unei formule când se cunoaște doar una din valorile variabilelor ca în tabelul de mai jos:

A	v	f
~A	f	v
A • B	B	f
A V B	v	B
A → B	B	v
A → B	v	~B
A ≡ B	B	~B

Să presupunem că trebuie să decidem asupra formulei A → ((~A V ~B) → (~C • B)). Facem mai întâi supozițiile A = v și A = f la care aplicăm legile de posibilitate descrise mai sus:

(1) v → ((~ v V ~B) → (~C • B)), (1`) f → ((~f V ~B) → (~C • B))
(2) (f v ~B) → (~C • B), (2`) v
(3) ~B → (~C • B).

Valoarea formulei inițiale depinde acum de valoarea formulei (3) pe care o calculăm mai departe după valoarea variabilei B:

(4) ~v → (~C • v) (4`) ~f → (C • f)
(5) f → ~C (5`) v → f
(6) v (6`) f.

Pentru că formula noastră ia valoarea v pentru unele valori ale variabilelor sale și f pentru altele ea este realizabilă (sau consistentă).

Acest raţionament prescurtat poate fi redat matriceal indicându-se valoarea formulei doar pentru valorile variabilelor discutate.

A, B, C	A → ((~A v ~B) → (~C • B)
v v	v
f	v
v f	f

Statutul unei formule poate fi recunoscut fie calculând valoarea formulei respective ca în exemplul de mai sus, fie aducând-o la o formă standard numită de aceea şi „formulă normală". Decizia prin forme normale este modalitatea sintactică de decizie în logică. Mă voi ocupa aici numai de formele normale booleene (cele care au la bază operatorii booleeni: -, •, V) însă trebuie ştiut că există şi alte forme normale. La noi, E. Mihăilescu a studiat formele normale bazate pe echivalenţă pe care le-a aplicat apoi în analiza diferitelor proprietăţi ale sistemelor axiomatice. Din păcate, E. Mihăilescu nu a făcut explicit procedeul său, motiv pentru care el nu a mai fost folosit până la momentul de faţă.

Mai întâi câteva definiţii: [1]

Definiţia 1. Se numeşte termen prim orice variabilă propoziţională sau negaţie a acesteia (ex. p, q, r, ~p, ~q, ...).

Definiţia 2. Se numeşte conjuncţie primă orice termen prim şi orice conjuncţie de termeni primi (ex. A, B, ~A, A • B, A • ~B • ~C, etc).

Definiţia 3. Se numeşte disjuncţie primă orice termen prim şi orice disjuncţie de termeni primi (A, B, ~A v B v C, ...).

Definiţia 4. Se numeşte formă normală conjunctivă, conjuncţia oricărei mulţimi de disjuncţii prime.

Definiţia 5. Se numeşte formă normală disjunctivă disjuncţia oricărei mulţimi de conjuncţii prime.

O specie aparte de forme normale sunt formele normale perfecte în care fiecare conjuncţie (respectiv disjuncţie) primă conţine toate variabilele care apar în formulă cu sau fără negaţie.

---

[1] Aceste definiţii le-am reformulat după cartea lui Ghe. Enescu *Logica Simbolică* (Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1971), pag. 46.

Algoritmul normalizării este exemplu clasic de algoritm în logică. Regulile care stau la baza lui se pot clasifica în trei mari grupe.
1) Reguli de eliminare a operatorilor nebooleeni (aceste reguli constau în transcrierea operatorilor propoziționali prin -, • respectiv -, v).
2) Reguli de coborâre a negației pe variabilă (constau în aplicarea legilor dublei negații și a transformărilor de Morgan).
3) Reguli de formare a conjuncției respectiv disjuncției normale (se aplică, după caz, distributivitatea conjuncției la disjuncție și invers).

Formele normale perfecte mai adaugă o categorie de reguli și anume reguli de introducere a variabilelor. Presupunând că α este o conjuncție, respectiv o disjuncție primă care nu conține pe A, variabila A se adaugă în felul următor:
1) $\alpha \bullet (A \vee \sim A) = (\alpha \bullet A) \vee (\alpha \bullet \sim A)$
2) $\alpha \vee (A \bullet \sim A) = (\alpha \vee A) \bullet (\alpha \vee \sim A)$

Aceste reguli sunt aplicații ale legilor de posibilitate $\alpha \bullet v = \alpha$ și $\alpha \vee f = \alpha$ unde $A \vee \sim A$ stă pentru v iar $A \bullet \sim A$ stă pentru f.

Cum recunoaștem statutul unei formule după forma ei normală? Cel mai simplu ar fi urmărind dacă în conjuncțiile respectiv disjuncțiile prime apare o variabilă împreună cu negația ei. Constituienții respectivi sunt în acest caz tautologii respectiv contradicții, statutul formulei fiind ușor de apreciat. Se înțelege că nu întotdeauna lucrurile stau atât de simplu și atunci trebuie să aducem formula la una din formele normale perfecte. Decizia prin formele normale perfecte se realizează în baza unor corelații ce se pot stabili între numărul de constituienți ai formei normale și numărul de variabile din formulă. Dacă numărul de constituienți din f.n.d.p. este 2^n (n fiind numărul de variabile) atunci formula este tautologie. Dacă numărul de constituienți din f.n.c.p. este 2^n, formula este contradicție. Dacă numărul de constituienți dintr-o formă normală perfectă (fie ea conjunctivă sau disjunctivă) este mai mic decât 2^n, atunci formula este realizabilă. Mai trebuie adăugat că tautologiile nu au f.n.c.p., iar contradicțiile nu au f.n.d.p.

Iată și o ilustrare foarte simplă de decizie prin f.n.d.p. asupra formulei care ne-a servit drept exemplu până acum.
1) $A \rightarrow ((\sim A \vee \sim B) \rightarrow (\sim C \bullet B))$
2) $\sim A \vee (\sim(\sim A \vee \sim B) \vee (\sim C \bullet B))$

3) ~A V (~~A • ~~B) V (~C • B)
4) ~A V (A • B) V (~C • B)

Adăugăm la ~A mai întâi pe B şi apoi pe C:

~A • (B V ~B) = (~A • B) V (~A • ~B)
(~A • B) • (C V ~C) = (~A • B • C) V (~A • B • ~C)
(~A • ~B) • (C V ~C) = (~A • ~B • C) V (~A • ~B • ~C)

Tot în 4) adăugăm la (A • B) pe C iar la (~C • B) pe A:

(A • B) • (C V ~C) = (A • B • C) V (A • B • ~C)
(~C • B) • (A V ~A) = (A • B • ~C) V (~A • B • ~C).

În locul formulei 4) am obţinut o formă echivalentă cu ea:

5) (~A • B • C) V (~A • B • ~C) V (~A • ~B • C) V (~A • ~B • ~C) V (A • B • C) V (A • B • ~C) V (A • B • ~C) V (~A • B • ~C).

Reducem termenii asemenea conform legii de indempotenţă a disjuncţiei şi obţinem f.n.d.p. a formulei 1):

6) (A • B • C) V (~A • B • C) V (A • B • ~C) V (~A • ~B • C) V (~A • B • ~C) V (~A • ~B • ~C).

Pentru că numărul de constituienţi în această formă normală este mai mic decât 2^3, formula 1) este o formulă realizabilă.

6. PROBLEMA DECIZIEI ÎN LOGICA PREDICATELOR

Fără să fie decidabilă în sens general, logica predicatelor este totuşi decidabilă în sens particular. Vreau să spun că problema deciziei se discută aici pe cazuri particulare date în principal de: 1) structura domeniilor, 2) structura formulei, 3) tipul cuantificării, ş.a. Din punct de vedere semantic, decizia se realizează cu ajutorul unor tabele de adevăr asemănătoare celor din logica propoziţiilor. Condiţia este ca domeniul de interpretare să fie suficient de restrâns iar structura formulei să fie şi ea rezonabilă. Aceste condiţii sunt cât se poate de imprecise de acea voi recurge la un exemplu.

Să considerăm formula $\forall x\, F(x)$ definită pe un domeniu $D = \{a, b\}$. Variabila predicativă F ia valori într-o mulţime de predicate ce pot fi clasificate în patru mari categorii:

1) Adevărate atât *a* pentru cât şi pentru *b*,
2) Adevărate pentru *a* şi false pentru *b*,

3) False pentru *a* şi adevărate pentru *b*,
4) False pentru *a* ca şi pentru *b*.

Predicatele din prima categorie le vom nota cu $F_1(x)$, pe cele din a doua cu $F_2(x)$, şi aşa mai departe. Următorul tabel redă valorile formulei F(x) pentru valorile F_1, F_2, F_3, F_4, ale variabilei F şi pentru valorile *a*, *b*, ale variabilei x:

F(x)	*a*, *b*
$F_1(x)$	v, v
$F_2(x)$	v, f
$F_3(x)$	f, v
$F_4(x)$	f, f

Întrucât cuantorul universal se transcrie cu ajutorul conjuncţiei, întreaga formulă se poate desfăşura ca o succesiune de conjuncţii după valoarea variabilei F:

F(x)	$\forall x\, F(x) = F(a) \cdot F(b)$
$F_1(x)$	$\forall x\, F_1(x) = F_1(a) \cdot F_1(b)$
$F_2(x)$	$\forall x\, F_2(x) = F_2(a) \cdot F_2(b)$
$F_3(x)$	$\forall x\, F_3(x) = F_3(a) \cdot F_3(b)$
$F_4(x)$	$\forall x\, F_4(x) = F_4(a) \cdot F_4(b)$

Înlocuind pe $F_1(a)$, $F_1(b)$, $F_2(a)$,... cu valorile lor din primul tabel şi aplicând regulile de adevăr pentru conjuncţie obţinem în final următoarea matrice:

F(x)	$\forall x\, F(x)$
$F_1(x)$	v
$F_2(x)$	f
$F_3(x)$	f
$F_4(x)$	f

Se observă că pentru domeniul ales, formula $\forall x\, F(x)$ are aceeaşi matrice cu conjuncţia şi este uşor de arătat că $\exists x\, F(x)$ va avea aceaşi matrice cu disjuncţia. De fapt „$\forall$“, „$\exists$“ sunt conjuncţii, respectiv disjuncţii „deghizate“, proprietăţile lor formale fiind în mare măsură aceleaşi. În orice caz, formula este adevărată pentru unele

interpretări şi falsă pentru altele şi acesta este lucrul cel mai important pentru problema pe care o discutăm.

Din punct de vedere sintactic decizia în logica predicatelor se realizează tot prin forme normale, însă aceste forme normale sunt de un tip mai special. Pentru a putea identifica cazurile de decidabilitate prin algoritmul nominalizării, sunt necesare câteva concepte noi pe care le voi reproduce în continuare.

1) ***Formulă redusă***. O formulă A este redusa formulei B dacă în formula A figurează numai operatorii booleeni iar negaţia afectează cel mult variabile propoziţionale (dacă apar) şi variabilele predicative. Formula $\exists x \sim F(x) \vee F(y)$ este formă redusă pentru $\forall x\, F(x) \rightarrow F(y)$.

2) ***Formă normală prenexă***. O formulă redusă este formă normală prenexă dacă: a) nu conţine cuantorii şi este în formă normală booleană, sau b) cuantorii formează un prefix iar matricea (= domeniul de acţiune al prefixului) este în formă normală booleană. Formula $\forall x\, \forall y\, (\sim F(y) \vee H(x, y)$ este formă normală prenexă pentru $\forall x\, (\exists y\, F(y) \rightarrow H(x, y)$.

3) ***Formă normală Skolem***. O formă normală în care nici un cuantor existenţial, dacă apare, nu urmează unui cuantor universal se numeşte formă normală Skolem.

Conform teoremei lui Skolem orice formulă predicativă are o formă normală Skolem deductiv echivalentă cu ea. Ce înseamnă această „echivalenţă deductivă"? Dacă A, B, C sunt formule predicative şi dacă $A, B \vdash C$ respectiv $A, C \vdash B$, atunci C şi B sunt în relaţie de echivalenţă deductivă.

Este discutabil astăzi dacă se poate da sau nu un inventar complet al cazurilor de decidabilitate din logica predicatelor. Câteva din cele mai importante au fost adunate de W. Ackermann în cartea sa *Solvable cases of decision problem* (Amsterdam, 1954). Este vorba în principal de formule care conţin numai variabile predicative de un singur argument plus o serie de formule a căror forme prenexe sunt de un tip mai special, şi anume:

1) prefixul lor nu conţine cuantorii existenţiali,

2) prefixul nu conţine cuantorii universali,

3) cuantorii existenţiali, dacă există, nu apar în faţa unui cuantor universal,

4) prefixul nu conține mai mult de un cuantor existențial,
5) prefixul nu conține mai mult de doi cuantori existențiali între care nu apare un cuantor universal,
6) matricea formei prenexe este o disjuncție de formule elementare și negații ale acestora,
7) prefixul este de forma $(\exists x_1) \ldots (\exists x_n) (\forall y_1) \ldots (\forall y_m)$ și fiecare formulă elementară din matrice care conține una sau mai multe din variabilele $x_1,\ldots, x_n$, le conține sau pe toate aceste variabile sau una din variabilele $y_1,\ldots, y_m$,
8) prefixul se încheie cu $(\forall z_1)\ldots (\forall z_n)$ și fiecare formulă elementară din matrice care conține cel puțin una din variabilele din prefix va conține cel puțin una din variabilele $z_1, z_2,\ldots, z_n$.
9) prefixul este de forma $(\exists x) (\forall y) (\exists z_1) \ldots (\exists z_n)$ unde $n \leq 4$, iar matricea este de forma $G(x, y) \rightarrow H(z_1,\ldots,z_n)$.

Se demonstrează în continuare o serie de teoreme, numite și „teoreme de evaluare", care stabilesc valoarea formulei în funcție de forma prenexă la care ea poate fi adusă și de domeniul de valori ale variabilelor sale individuale.
Iată și câteva exemple de astfel de teoreme:
1) O formulă $(\forall x_1)\ldots (\forall x_m)$ M $[x_1,\ldots, x_n]$ care nu are decât cuantori universali este universal validă dacă ea este validă într-un domeniu cu m indivizi.
2) O formulă $(\exists x_1)\ldots (\exists x_n)$ M $[x_1,\ldots, x_n]$ care nu conține decât cuantori existențiali este universal validă dacă ea este validă într-un domeniu cu un singur individ.
3) O formulă $(\forall x_1)\ldots(\forall x_n) (\exists y_1)\ldots(\exists x_m)$ M $[x_1,\ldots, x_n; y_1,\ldots, y_m]$ în care toți cuantorii universali preced cuantorii existențiali, este universal validă dacă ea este validă în orice domeniu cu n indivizi.

Formele normale Skolem aduc în discuție ideea de *reducție* și *clase de reducție*. Prin „reducție" se înțelege un procedeu (algoritm) în baza căruia pentru o formulă oarecare se poate construi o altă formulă dintr-o clasă determinată (= clasa de reducție) care este în raport de echivalență deductivă cu ea. J. Surányi va dedica o monografie

problemei reducției în genul monografiei lui W. Ackermann pentru problema deciziei.[1]

7. CONCLUZII

Metoda algoritmică are o situație asemănătoare celorlalte concepte și metode matematice întâlnite până acum în logică. Apărută pe terenul matematicii ea a depășit în momentul de față granițele acestei științe. După cum s-a putut observa, o serie de procedee logice prezintă aceleași particularități cu algoritmi din matematică și acesta este de fapt motivul principal pentru care vorbim astăzi de „metoda algoritmică" în logică. Dacă privim lucrurile din perspectiva acestei particularități, atunci algoritmii din matematică, ca și cei din logică, ne apar drept cazuri particulare în raport cu un concept foarte general de algoritm. Nevoia elaborării unui asemenea concept a apărut tocmai în momentul în care s-a descoperit că și în alte domenii se aplică metode ce întrunesc, din punct de vedere formal condițiile algoritmului matematic.

Trakthenbrot (71) împarte algoritmii în două mari categorii - algoritmi matematici și algoritmi logici. În această ultimă categorie intră orice algoritm care nu este matematic. Totuși unii dintre ei cum este algoritmul căutării drumului într-un labirint, au prea puțin în comun cu logica. Întrebarea care se pune, așadar, este ce criterii folosim pentru a aprecia natura unui algoritm? Trei lucruri trebuie să avem când analizăm această problemă: 1) natura entităților la care algoritmul se aplică, 2) sistemul de simboluri (limbajul) prin care el se realizează, 3) problemele pe care le rezolvă. Faptul că aceste condiții pot fi discutate în logică ne obligă să considerăm algoritmul logic ca pe o specie aparte de algoritm. Aceleași criterii ne ajută să determinăm în continuare diferite subspecii ale speciei logice de algoritm. Vorbim

---

[1] Pentru detalii suplimentare vezi studiul lui Ghe. Enescu *Problema deciziei în logica standard* (Analele Univ. București, seria Filosofie, Anul XXXVI, 1987) și vol. II din W. și N. Kneale, *Dezvoltarea logicii* (Editura Dacia, Cluj, 1975).

astfel de algoritmi sintactici şi algoritmi semantici, deşi unii dintre e se aplică în rezolvarea uneia şi aceleiaşi probleme (vezi problem deciziei).

Ce raport există între algoritm şi inferenţă, în speţă inferenţa de tip deductiv? În *Mica enciclopedie de matematică* citim în capitolul *Algoritmi şi funcţii recursive* următoarele: „În cadrul matematicii şi logicii algoritmii apar ca metode generale pentru rezolvarea tuturor problemelor dintr-o clasă dată. (...). Ca exemple de procese algoritmice sunt inferenţa logică şi unele procese de calcul din matematică, în particular, metode de rezolvare pentru diferite tipuri de ecuaţii". (78; 421).

Prima afirmaţie din acest pasaj este o observaţie generală asupra algoritmului şi nu ridică probleme. A doua însă, trebuie luată după părerea mea cu unele rezerve. Concluziile se deduc nu se calculează de aceea derivabilitatea (sau deductibilitatea) este altceva decât simpla rezolvare algoritmică. Aici intervine, de altfel, deosebirea esenţială dintre metoda axiomatică şi metoda algoritmică. Într-un anumit fel sistemul axiomatic rezolvă problema deciziei, însă algoritmul nu rezolvă peste tot problema deductibilităţii. Fiecare formulă validă îşi are propriul său mecanism de demonstrare ceea ce anulează caracterul „de masă" al procesului (definitoriu pentru algoritm).

Începând cu anii `60, dacă nu cumva chiar mai devreme, o serie de autori au încercat să algoritmizeze procesul de deducţie, să „maşinizeze" logica pe baza operaţiei de programare. Trebuie spus că performanţele cu totul excepţionale ale maşinilor de calcul din zilele noastre au redeşteptat speranţa inventării de maşini cu „virtuţi logice" asemănătoare omului dacă nu chiar superioare lui. Totuşi, rezultatele s-au dovedit a fi destul de modeste pentru că teoremele obţinute pe această cale, fie că au fost deja demonstrate, fie că nu au fost demonstrate dar atunci sunt banale şi nu prezintă interes deosebit. „Scopul matematicianului, arată Rasiowa şi Sikorski, nu este doar de a deduce enunţurile adevărate, ci şi de a descoperi enunţuri interesante. Mecanizarea, posibilă din punct de vedere teoretic, a procesului de deducţie în matematică, nu are nici o valoare practică". (61; 201)

Actualele cercetări din domeniul inteligenței artificiale ne îndeamnă la prudență când discutăm aceste probleme. Ceea ce părea imposibil acum jumătate de secol, s-ar putea să nu mai pară atât de imposibil în zilele noastre. Totuși, conceptul de „inteligență artificială" nu trebuie să inducă în eroare pentru că el nu este identic cu inteligența umană ci reprezintă doar o parte din ceea ce este stereotip în această inteligență. Să nu uităm apoi că în ultima vreme direcția de cercetare s-a deplasat spre nivelul metateoretic unde dispunem de mai puțin formalism și unde se cere foarte multă intuiție. Rămân apoi problemele de fundamentare, cum este problema paradoxelor, care depind în mod esențial de capacitatea de autoreflexie a omului. Când mașina va dobândi o asemenea capacitate de autoreflexie ea va candida la un loc apropiat de al omului și când spun aceasta mă gândesc nu doar la probleme de creație tehnică.

În concluzie, logica rămâne alături de matematică unul din cele mai importante domenii în care își găsesc aplicarea procesele algoritmice. Utilizarea lor a dus la o sporire considerabilă a preciziei pentru că, așa cum arăta Gr. Moisil, prin întrebuințarea calculului termenii au dobândit o semnificație univocă.

CAP. V

LOGICA ŞI CONCEPTUL SEMANTIC DE MODEL

Vorbind despre limbajele simbolice şi formalizate am făcut referiri şi la unele probleme legate de semantica acestor limbaje - problema interpretării, problema valorii formulelor relativ la o anume interpretare, problema domeniilor de interpretare, ş.a. În capitolul de faţă voi relua discuţia din perspectiva conceptului semantic de model. Toate conceptele matematice pe care le-am examinat în capitolul III îşi găsesc utilizarea aici motiv pentru care semantica modernă („algebrică" sau „structurală" cum mai este cunoscută ea astăzi), se prezintă adeseori sub forma unor teorii cu un pronunţat caracter matematic. Unii autori identifică noua formă a semanticii logice cu teoria modelelor, idee pe care nu o împărtăşesc în totalitate. Cele două teorii se intersectează în zone destul de largi, totuşi, ele nu sunt identice în totalitate. După cum precizează A. Mostowski, teoria modelelor este destinată aprofundării unor discipline matematice ca şi unor aspecte ce ţin de fundamentele matematicii. Din această cauză nu voi intra în toate detaliile teoriei modelelor ci mă voi rezuma doar la acele aspecte care sunt de interes pentru logică.

1. INTERPRETARE ŞI MODEL

O primă problemă care trebuie discutată şi de care depinde în bună măsură înţelegerea celorlalte probleme este *ce anume interpretăm*? S-a încetăţenit ideea, cel puţin în literatura noastră de specialitate, că interpretarea se referă la diferitele tipuri de limbaj. Iată ce scrie în acest sens Gh. Enescu în *Teoria sistemelor logice*: „Orice limbaj în înţelesul deplin al cuvântului (ca unitate sintactico-semantică) conţine deja o interpretare. A interpreta înseamnă a acorda referent pentru *formele sintactice* (simboluri elementare şi secvenţe finite de asemenea simboluri). Strict vorbind deci, interpretare are sens

numai în raport cu formele sintactice (formele grafice în speță). Dacă vorbim de „interpretarea unui limbaj" aceasta înseamnă : „reinterpretare" în care renunțăm la conținutul cognitiv inițial (sau deja existent) al expresiilor pentru a le acorda altul (în acest mod a procedat Hilbert cu geometria în ce privește termenii, în acest mod se procedează cu cifrele prin trecerea de la un sistem în baza zece la un alt sistem)" (20; 324).

Reținem deci că problema interpretării se pune în raport cu sintaxa limbajului (sistemul de semne prime) și nu cu limbajul propriu-zis unde avem de fapt o reinterpretare. În sistemele formale este vorba tot de interpretări pentru că nici aici obiectele formale nu sunt racordate inițial unui referent. Prin interpretare aceste obiecte formale devin expresii într-un limbaj formalizat.

Fie S un sistem de obiecte formale și D un domeniu de semnificații oarecare nevid. Prin interpretarea lui S în D înțelegem un ansamblu de corespondențe între S și D prin care fiecărui element sau secvență finită de elemente din S îi corespunde un element determinat din D. Dacă ținem seama că și domeniul D este dat tot printr-un limbaj, să-l notăm cu L_D, atunci interpretarea lui S înseamnă de fapt un ansamblu de corespondențe între S și L_D. De regulă aceste corespondențe satisfac condițiile unor corespondențe funcționale de aceea interpretarea lui S poate fi dată și sub forma unei funcții, sau aplicații, de la S la D sau de la S la L_D. Regulile de corespondență, aceleași cu regulile de interpretare, se formulează de la caz la caz în funcție de structura, tipul și complexitatea sistemului formal S.

Un sistem de semnificații pentru care o formulă α din S devine propoziție adevărată se numește *modelul* lui α. Altfel spus, modelul este acea interpretare care transformă formula α în propoziție adevărată. Câteva precizări se impun aici.

1) Termenul „model" poate fi luat numai pentru desemnarea acelor semnificații în raport cu care formula devine propoziție adevărată. Modelul formulei $\exists x\, Fxy$, de exemplu, poate fi mulțimea $M = \{\geq, 3\}$ formată din predicatul „mai mare sau egal" și conceptul numeric „trei". Propoziția „$\exists x\, (x \geq 3)$" este o propoziție adevărată în aritmetica numerelor întregi.

2) Dacă interpretarea este concepută ca o funcție așa cum am spus mai sus, atunci modelul poate fi dat ca un sistem $M = \{D,\varphi\}$. Pentru conceptul „adevărat în M" putem introduce notațiile (inspirate de la Mostowski): $\vdash_M \alpha$ și $\vdash^{\varphi}_{D} \alpha$. În prima apare modelul ca întreg, în a doua elementele constitutive ale modelului (funcția de interpretare și domeniul).

3) O expresie se poate raporta la domeniu în două modalități:

„A avea sens în D" = df „A putea fi interpretat în D",

„A avea loc în D" = df „A fi adevărat relativ la o anume interpretare în D".

Cu alte cuvinte domeniul D poate fi descris prin limbajul formalizat L_S dacă și numai dacă expresiile din L_S se raportează adevărat sau fals la D. Sunt excluse din capul locului acele situații în care s-ar putea obține expresii fără sens. Această condiție a fost impusă de nevoia eliminării paradoxelor.

Într-o abordare generală natura domeniilor nu se specifică, o expresie putând fi adevărată sau falsă indiferent de domeniu și de interpretarea semnelor care apar în ea. Uneori însă, este important să cunoaștem unele lucruri despre domeniu. De exemplu, dacă o formulă este cuantificată existențial se impune ca domeniul ei să fie nevid. În acest caz el poate să fie finit sau infinit. Dacă este finit, numărul lui de elemente poate fi determinat sau nedeterminat iar dacă este infinit poate fi infinit numărabil sau nenumărabil. După natura elementelor distingem între modele matematice și nematematice. Primele pot fi structurate (se definesc pe ele operații și relații ce verifică axiomele unor cunoscute structuri matematice) sau nestructurate (simple mulțimi).

2. MODELE ARITMETICE ÎN LOGICĂ

Dintre domeniile matematice un interes aparte îl prezintă pentru problema modelelor aritmetica. Diferitele sisteme de aritmetică pot furniza modele pentru silogistică, logica propozițiilor, logica predicatelor, anumite sisteme de logică polivalentă și modală.

Primul model aritmetic în logică a fost construit de Leibniz în 1679 pentru silogistică şi a avut drept scop examinarea validităţii modurilor silogistice şi a inferenţelor imediate studiate de Aristotel. În esenţă, procedeul lui Leibniz constă în asocierea de perechi de numere prime între ele şi de semn contrar celor doi termeni din structura propoziţiilor de predicaţie. O propoziţie universal afirmativă este adevărată dacă numerele subiectului pot fi divizate prin numerele de acelaşi semn ale predicatului. Dacă termenului A îi corespunde perechea <70;-33> şi termenului B perechea <10, -3> atunci propoziţia „Toţi A sunt B" este adevărată pentru că:
a) 70 şi -33 respectiv 10 şi -3 sunt prime între ele,
b) 70 este divizibil cu 10,şi -33 este divizibil cu -3.

O propoziţie universal negativă este adevărată dacă două numere de semne diferite şi aparţinând la termeni diferiţi în propoziţie au cel puţin un divizor comun. Propoziţiile particulare sunt adevărate când universalele corespunzătoare lor de calitate opusă sunt false (regulile de interpretare se deduc cu uşurinţă). Un mod silogistic este valid dacă în interpretarea dată adevărul concluziilor derivă din adevărul premizelor.

În secolul nostru modelul lui Leibniz a fost preluat de către J. Slupecki care l-a simplificat şi l-a adaptat demonstraţiilor de consistenţă în raport cu diferitele axiomatizări date silogisticii. Iată şi interpretăriile care stau la baza acestor demonstraţii:
SaP = „S divide P",
SeP = „S şi P sunt prime între ele",
SiP = „S şi P au un divizor comun"
SoP = „S nu divide P"

Într-un studiu intitulat sugestiv *Calculemus* (Notre - Dame Journal of Formal Logic, vol 21 nr. 1/1980), W.N.Friedman a construit un alt model aritmetic pentru silogistică în baza următoarelor interpretări:
SaP = (1/S)P,
SeP = (1/S)(-1/P),
SiP = 2SP
SoP = -2SP

Un termen negativ, să zicem non-S este interpretat prin -1/S. Conform interpretării lui Friedman, într-un silogism valid produsul premiselor trebuie să fie egal cu concluzia. Dacă premisele sunt universale şi concluzia particulară se adaugă premisa existenţială $2x^2$ (x poate fi, după caz, S,P sau M). Pentru exemplificare să luăm modelul Darapti din figura III:

MaP, MaS ├ SiP

$(1/M)P \cdot (1/M)S \cdot 2M^2 = 2SP$

Cele trei interpretări aritmetice demonstrează validitatea modurilor silogistice în sensul că fiecărui mod valid îi corespunde o propoziţie adevărată în interpretare aritmetică. Dacă sistemul ar fi axiomatizat problema s-ar pune mult mai simplu pentru că în acest caz ar fi suficient să arătăm în baza unei interpretări oarecare că axiomele şi regulile de derivare sunt valide pentru ca toate formulele derivabile în sistem să fie valide. Aceasta este tot una cu a demonstra necontradicţia sau consistenţa sistemului iar în axiomatica prehilbertiană se poate spune că a fost chiar unicul mod de demonstrare a consistenţei. Se asigură, aşadar, consistenţa unei teorii prin consistenţa teoriei în care aceasta urmează a fi interpretată. În cazul nostru aritmetica este o teorie consistentă, de aceea, orice altă teorie interpretabilă aritmetic este de asemenea consistentă.

O interesantă exemplificare a acestei idei am găsit-o în studiul lui L.S.Gagnon *Three theorie of dialectic* (Notre Dame Journal of Formal Logic, Nr 2/1980), în care se demonstrează consistenţa a trei teorii formale intitulate de el TAS_1, TAS_2, TAS_3. Acestea sunt trei variante de formalizare a dialecticii hegeliene (TAS_2 este o extindere faţă de TAS_1, iar TAS_3 o extindere faţă de TAS_2). Mă voi rezuma la sistemul TAS_1 (cel mai simplu) care are la bază următorul simbolism:

x, y, z... variabile individuale definite pe mulţimea evenimentelor (fizice şi/sau mentale)

T, A, S constantele nelogice *teză, antiteză şi sinteză.*

(Se adaudă la acestea simbolismul obişnuit din logica predicatelor.)

În continuare se postulează două categorii de axiome.

Axiome existenţiale

1) $\exists x Ty$,

2) $\forall x(Tx \rightarrow \exists y.Ayx)$,

3) $\forall x\ \forall y(Axy \rightarrow \exists z.Sxyz)$,

Axiome de relație

4) $\forall x\ \forall y(Ayx \rightarrow (Tx\ \&\ \sim Axy))$

5) $\forall x\ \forall y\ \forall z(Szxy \rightarrow (Tx\ \&\ (Axy\ V\ Ayx))\ \&\ \sim(Sxyz\ V\ Syxz))$

Pentru această formalizare este construit un model aritmetic mulțimea numerelor naturale, mai puțin zero, în baza următoarei interpretări:

a) Tx = „x este impar",

b) Axy = „x este numărul par care îi succede lui y",

c) Sxyz = „x este suma numerelor y și z, și fie că y îi succede lui z. i că z îi succede lui y".

Iată cum se traduce în această interpretare axioma 2): „Pen orice x, dacă x este impar, atunci există un număr y astfel că y es numărul par care îi succede lui x". Întrucât toate axiomele transformă în propoziții aritmetice adevărate, rezultă că interpretări a) - c) reprezintă un model al sistemului TAS_1 în domeniul D = {N {0}, Par, Impar, +, `} iar sistemul TAS_1 este consistent.

3. ALTE MODELE

Exemplul reprodus este semnificativ nu doar pentru că oferă ilustrare simplă și intuitivă demonstrației de consistență ci și pentru ne menține în planul interpretărilor aritmetice. Asemenea interpreti există pentru multe alte sisteme logice așa cum am menționat început. Totuși, aritmetica nu este singura sursă de interpretare formalismelor logice. Structurile matematice și în special ace formațiuni algebrice definite relativ la sintaxa logică reprezintă un important domeniu pentru problema interpretării și a modelării logică. Există astăzi o întreagă literatură pe această temă. V reproduce mai jos, după Rasiova - Sikorski, algebra sistemul deductiv al logicii propozițiilor.

Fie α, β,... formulele în limbajul L_0 (= limbajul logi propozițiilor) și „$\approx$" o relație de echivalență în S_0 care poate fi ch relația de echivalență logică. Formulele a, b,... determină relativ la ... clasele de echivalență $//\alpha//$, $//\beta//$,... astfel că $//\alpha// = \{x: x \approx a\}$.

Relația „≈" determină o partiție a mulțimii formulelor F_0 din L_0 pe care o vom nota cu $F_{0/\approx}$. În plus „≈" este o congruență în raport cu operațiile algebrei formulelor $F_0 = \{F_0, \bullet, V, -, \rightarrow,\}$ și induce în mulțimea $F_{0/\approx}$ operațiile $\cap$, $\cup$, $\Rightarrow$, $\sim$ după cum urmează:

$//\alpha \bullet \beta// = //\alpha// \cap //\beta//;$ $\quad //\alpha \rightarrow \beta// = //\alpha// \Rightarrow //\beta//$

$//\alpha \vee \beta// = //\alpha// \cup //\beta//$ $\quad // - \alpha// = \sim //\alpha//.$

Algebra $\mathcal{U}(S_0) = \{ F0_{/\approx}, \cap, \cup, \Rightarrow, \sim\}$ cunoscută și sub numele de „algebră Lindembaum" este algebra sistemului deductiv al logicii propozițiilor $S_0 = \{L_0, Cn\}$. Ea poate fi definită practic în raport cu orice alt sistem deductiv. Interesul special care se leagă de o asemenea algebră constă în faptul că permite interpretări și modele pentru logică adecvate unei tratări pur matematice.

4. CONCEPTUL DE MODEL ÎN LOGICA PROPOZIȚIILOR

Fie limbajul L_0 al logicii propozițiilor descris în capitolul I al acestei lucrări. Există trei modalități principale de interpretare a semnelor care intervin în sintaxa acestului limbaj.

1) Interpretarea prin propoziții determinate din limbajul natural și prin cuvintele de legătură „și", „sau", „non" etc.

2) Interpretarea prin semnificațiile logice „v", „f" (adevăr, fals) pentru variabile și prin operațiile cunoscute pentru operatori.

3) Interpretarea prin elementele unei algebre booleene.

Conceptul de tautologie sau lege logică se definește separat pentru fiecare caz în parte.

Definiția 1. O formulă $\alpha \in L_0$ este tautologie sau lege logică dacă și numai dacă α devine propoziție adevărată indiferent de propozițiile prin care sunt interpretate variabilele x, y,... care intervin în α.

Definiția 2. O formulă $\alpha \in L_0$ este tautologie dacă și numai dacă are valoarea „v" (adevărat) indiferent de valorile v, f ale variabilelor sale propoziționale.

Definiția 3. O formulă $\alpha \in L_0$ este tautologie dacă este identică cu elementul unitate în orice algebră booleeană.

După cum este uşor de remarcat, cele trei interpretări se situează la nivele diferite de abstracţie în raport cu limbajul, fiecare asociindu-şi o „metodă de lucru" (definiţii, reguli de adevăr, procedee de demonstrare, forme de expunere). Ne interesează, deocamdată. interpretarea prin algebre booleene pe care o voi schiţa pe scurt în cele ce urmează.

Fie A = {A, •, V, →, -,} o algebră booleeană (pentru simplificarea expunerii notăm tot cu •, V, →, - operaţiile algebrei A). Interpretarea alfabetului A_0 din limbajul logicii propoziţiilor L_0 se mai numeşte şi *evaluare* şi se defineşte ca o funcţie v : $A_0 \to A$. Prin funcţia v fiecare variabilă din A_0 devine un element din A şi fiecare operaţie din A_0 o operaţie în A. Adoptăm după Rasiova - Sikorski notaţia „ $\alpha_A^{(v)}$" care înseamnă „evaluarea v a formulei α în A". Orice formulă $\alpha \in F_0$ va determina acum o aplicaţie α_A: $A_0^{V_0} \to A$ unde V_0 este mulţimea variabilelor propoziţionale şi a operatorilor din A_0. De exemplu, dacă α este formula [(x → y) • z] V x aplicaţia α_A va asocia oricărui triplet $< a, b, c, > \in A^3$ elementul α_A $(a, b, c,)$ astfel că α_A $(a, b, c,) = [(a \to b) \bullet c] \vee a$.

Observaţia 1. Aplicaţia α_A este o aplicaţie de la $A \times A \times ... \times A$ la A şi se numeşte *polinomul booleean* determinat de α în A. Examinarea polinoamelor booleene corespunde într-un fel examinării liniilor din tabelele de adevăr ale formulei α.

Definiţia 4. O evaluare $v \in A^{V_0}$ într-o algebră nondegenerată A se numeşte *model* pentru o submulţime S de formule din F_0 dacă pentru orice formulă $\alpha \in S$ are loc $\alpha_A^{(v)} = 1$ (unde 1 reprezintă elementul unitate în algebra A).

Observaţia 2. În notaţia adoptată la începutul acestui capitol, în loc de „ $\alpha_A^{(v)}$ " s-ar putea folosi „ $\vdash_A^v \alpha$".

Definiţia 5. Orice model al unei mulţimi S de formule din F_0 într-o algebră booleeană cu numai două elemente se numeşte *model semantic*.

Definiţia 6. O formulă α este validă în algebra A dacă orice evaluare v este un model pentru a în A (altfel spus, aplicaţia $\alpha_A^{(v)}$ este identică cu elementul unitate în A).

Definiția 7. O formulă α este validă dacă este validă în orice algebră booleeană.

Fie acum $S_0 = \{L_0, Cn\}$ sistemul deductiv al logicii propozițiilor pentru care determinăm algebra $\mathcal{U}(S_0) = \{ F_{0/\equiv}, \cap, \cup, \Rightarrow, \sim\}$. O evaluare v a limbajului L_0 în algebra $\mathcal{U}(S_0)$ se numește „evaluare canonică". În acest caz orice formulă $\alpha \in F_0$ determină o evaluare $\alpha^{(v)}_{(S_0)}$ astfel că $\alpha^{(v)}_{(S_0)} = //\alpha// \in (S_0)$.

Următoarea teoremă stabilește o importantă relație între $\mathcal{U}(S_0)$ și S_0.

Teoremă. Dacă $\mathcal{U}(S_0)$ este nondegenerată atunci $S_0 = \{L_0, Cn\}$ este consistent.

Definiția 8. Un model $M = \{A, v\}$ unde $v \in A^{V_0}$ pentru un sistem S_0 se numește *adecvat* dacă pentru orice formulă $\alpha \in S_0$ este îndeplinită condiția: α este teoremă în S_0 dacă și numai dacă M este un model pentru α.

Cu ajutorul acestor concepte se demonstrează o serie de teoreme cu privire la validitate, derivabilitate, consistență, completitudine și independență. Acestea sunt principalele probleme ale semanticii logice în raport cu limbajul considerat.

5. CONCEPTUL DE MODEL ÎN LOGICA PREDICATELOR

Sintaxa logicii predicatelor cuprinde următorul sistem de simboluri:

1) Simboluri pentru variabile individuale: $x_1, x_2, x_3, \ldots$;
2) Simboluri pentru constante individuale: $c_1, c_2, c_3, \ldots$;
3) Simboluri pentru predicate: $F_1, F_2, F_3, \ldots$;
4) Simboluri pentru variabile propoziționale: $P_1, P_2, P_3, \ldots$;
5) Simboluri pentru operații logice: $\sim, \bullet, \vee, \rightarrow, \equiv, \exists$, ".
6) Simboluri pentru operații neologice: $O_1, O_2, O_3, \ldots$;
7) Simboluri auxiliare: (,); [,]; {,}.

Fie α o expresie predicativă ce conţine toate aceste categorii de simboluri şi D un domeniu de semnificaţii oarecare, nevid. Prin interpretarea lui α în D înţelegem o funcţie φ care asociază:

1) Fiecărei variabile individuale x_i un element determinat $\varphi(x_i) \in D$;
2) Fiecărei constante individuale c_i unelement determinat $\varphi(c_i) \in D$,
3) Fiecărei variabile predicative F_i un predicat $\varphi(F_i) \in D$
4) Fiecărui semn de operaţie n-ară O_n o operaţie φ (O_n): $D^n \rightarrow D$.

(Variabilele propoziţionale şi constantele propoziţionale &, V, ~ etc. se interpretează ca în paragraful precedent. Pentru a nu complica lucrurile considerăm că P_1, P_2,... sunt propoziţii adevărate sau false relative la domeniul D iar •, V, ~,... sunt operaţii logice cunoscute).

Pentru a face mai intuitivă această idee de interpretare precizez că $\varphi(x_i)$ este nume pentru elemente nedeterminate în D (sau variabile individuale), $\varphi(c_i)$ este nume pentru elemente determinate în D (constante individuale), $\varphi(F_i)$ este predicat definit pe elementele din D. iar $\varphi(O_n)$ operaţie de n argumente în D. Pentru cazul particular în care D = {{0, 1, 2,...},{>, =, <, Par, Imp},{x, -, +, `}} iar formula α este $\forall x(Fx \rightarrow \exists y\ (HOxy \bullet Gy))$ putem adopta următoarele valori pentru funcţia de interpretare φ:

$\varphi(Fx)$ = Par x
$\varphi(Ox)$ = x`
$\varphi(Gy)$ = Imp y
$\varphi(HOx,y)$ = (x` = y)

Prin φ formula α devine $\forall x$ (Par x $\rightarrow \exists y$ (x = y` • Imp (y)). adică: „oricare ar fi x, dacă x este par atunci există un număr y astfel că y este succesorul lui x şi y este impar."

Orice sistem de valori pentru care o formulă predicativă devine propoziţie adevărată se va numi *modelul* respectivei formule. În cazul nostru valorile pentru semnele din α sunt asociate prin funcţia φ ceea ce înseamnă că sistemul M = {D, φ } este modelul lui α. O formulă predicativă pentru care există cel puţin un model se va numi *realizabilă*. Atât adevărul cât şi realizabilitatea sunt definite în raport cu un anumit domeniu fapt ce permite în continuare unele generalizări. *Definiţia*1. O formulă a este *universal adevărată în* D dacă este adevărată pentru orice model M în D.

Definiția2. O formulă α este *universal adevărată* dacă este adevărată pentru orice model și pentru orice domeniu.

Următoarele propoziții redau câteva din conceptele semantice mai importante ale logicii predicatelor și relațiile dintre ele.

1) O formulă predicativă este realizabilă în genere dacă pentru ea există un model și este realizabilă într-un domeniu D dacă pentru ea există cel puțin un model în D. Formulele realizabile se mai numesc și *consistente*, iar cele nerealizabile *inconsistente*.

2) O formulă de tipul $\forall xA(x)$ este adevărată în D dacă orice valoare a lui x realizează formula A(x) (sau dacă A(x) este adevărată pentru orice model în D).

3) O formulă de tipul $\exists xA(x)$ este adevărată în D dacă există cel puțin o valoare a lui x în D pentru care A(x) este adevărată (sau dacă A(x) are cel puțin un model).

4) O formulă F(a) este adevărată în D dacă $\{a\}$ este model pentru formula F(x).

5) Un element $a \in D$ este valoare pentru variabila x din F(x) dacă F(a) este fie adevărată fie falsă relativ la D.

6) O formulă α implică logic o formulă β dacă orice model al formulei α este model al formulei β.

7) O formulă α este logic echivalentă cu β dacă orice model al lui α este modelul lui β, și invers.

8) O formulă α este consistentă dacă ea are cel puțin un model.

9) Formula α este logic independentă de formula β dacă există un model pentru β care nu este model pentru α.

10) Formula α este contradictoria formulei β dacă orice model al formulei α transformă pe β în propoziție falsă și orice model al formulei β transformă pe α în propoziție falsă.

11) Dacă $\alpha \in K$ și α are loc în orice domeniu în care are loc K atunci α este deductibilă dintr-o submulțime finită a lui K.

Fie D, D` două domenii astfel că $x \in D$ și $x` \in D`$. Notăm cu $x \text{ — } x`$ corespondența biunivocă dintre elementele domeniilor D, D`. Pe D definim în continuare predicatul $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ care ia valoarea v sau f pentru orice sistem de valori din D. Succesiunii de elemente (x_1,

$x_2, ...,x_n$) din D îi corespunde succesiunea ($x`_1, x`_2, ...,x`_n$) din D` ceea ce înseamnă că putem defini aici predicatul $F`(x`_1, x`_2, ...,x`_n)$.

Predicatul $F`(x`_1, x`_2, ...,x`_n)$ este definit în D` şi corespunde predicatului $F(x_1, x_2, ...,x_n)$ în D. Notăm această corespondenţă cu F — F`.

Definiţie. Două domenii D,D` între care există corespondenţa x — x` astfel că pentru orice predicat F definit în D are loc echivalenţa F ≡ F` se numesc izomorfe.

Cu ajutorul izomorfismului domeniilor se pot studia unele probleme privind axiomatizarea logicii predicatelor pe care le adăugăm la lista de mai sus.

12) Dacă două domenii sunt izomorfe şi dacă unul dintre ele împreună cu predicatele sale satisfac un sistem de axiome atunci şi celălalt satisface acest sistem de axiome.

13) Orice sistem de axiome pentru care toate domeniile de interpretare sunt izomorfe este complet.

5. CONCEPTUL DE MODEL ÎN LOGICA MODALĂ

Faţă de logica propoziţiilor şi logica predicatelor, definiţia conceptului de model în logica modală aduce deja unele noutăţi. Acest concept a fost dezvoltat în ceea ce se cheamă astăzi „semantica lumilor posibile" (sau „semantica în stil Kripke"), forma modernă a semanticii logice aferentă sistemelor modale de tip Lewis.

Istoric vorbind, ideea de lume posibilă apare la Leibniz dar semantica logicii modale aparţine secolului nostru.

Într-un cadru logic mai larg, conceptul de lume posibilă îşi găseşte corespondentul în conceptul lui Carnap de „descriere de stare" sau în conceptul lui Wittgenstein de „stare (posibilă) de lucruri." Ceea ce aduce nou semantica lumilor posibile faţă de semantica lui Carnap este că permite definirea unui concept specific de validitate pentru sistemele modale avute în vedere.

Ca şi în cazurile precedente voi da mai întâi lista principalelor categorii cu care operează acest tip de semantică logică.

1) Mulțimea lumilor posibile W = $\{w_1, w_2,...\}$ (lumea noastră aparține mulțimii W, ea este o lume posibilă de vreme ce este o lume reală).
2) Relația R de *accesibilitate* (sau de *alternativitate*) definită pe elementele mulțimii W. Prin w_iRw_k înțelegem că lumea w_k este accesibilă lumii w_i sau că w_k este o lume posibilă față de w_i. Din punct de vedere logic aceasta înseamnă că o propoziție adevărată în w_i este posibilă în w_k.
3) Mulțimea formulelor F = $\{a_1, a_2,...\}$ constituite în sintaxa sistemelor modale prin regulile de construcție cunoscute.
4) Mulțimea valorilor logice {1, 0} unde 1 și 0 înseamnă ca și până acum, adevărul și falsul.
5) Funcția de valorizare V: F × W → {1, 0} care restrânge adevărul formulelor din F la o lume posibilă sau o submulțime de lumi posibile din W. Prin $V(p,w_i)$= 1 înțelegem „propoziția p este adevărată în lumea posibilă w_i".

Funcția V se definește inductiv după structura expresiilor.
1) Pentru o variabilă propozițională p, $V(p, w_i) = 1$ dacă $p \in w_i$ și $V(p, w_i) = 0$ dacă $p \notin w_i$.
2) $V(\sim p, w_i) = 1$ dacă și numai dacă $V(\sim p, w_i) = 0$.
3) $V(p \cdot q, w_i) = 1$ dacă și numai dacă $V(p, w_i) = V(q, w_i) = 1$.
4) $V(p \vee q, w_i) = 1$ dacă și numai dacă $V(p, w_i) = 1$ sau $V(q, w_i) = 1$
5) $V(p \rightarrow q, w_i) = 1$ dacă și numai dacă nu are loc $V(p, w_i) = 1$ și $V(q, w_i) = 0$
7) $V(Lp, w_i) = 1$ dacă și numai dacă pentru orice lume w_k, $V(p, w_k) = 1$ și w_iRw_k.

Cu „M" și „L" am notat categoriile modale de „posibil" și „necesar" (a se observa rolul cuantorilor existențial și universal în definirea celor două concepte modale).

Definiția 1. Se numește *model* (pentru un sistem nespecificat de logică modală) un triplet de forma V = <W, R, V> unde W, R, V sunt elementele definite mai sus.

Definiția 2. Se numește *structură de modele* un triplet de forma $\mathcal{V}$ = <W, R, $\mathcal{V}$> unde $\mathcal{V}$ este clasa funcțiilor de valorizare definite relativ la W și R.

Definiția 3. O formulă α este verificată într-un model V dacă $V(\alpha, w_i) = 1$ și $w_i \in W$, $V \in \mathcal{V}$.

Definiția 4. O formulă α este *realizabilă* dacă este verificată în cel puțin un model.

Definiția 5. O formulă α este *validă* dacă este verificată în orice model din orice structură de modele.

Spre deosebire de logica propozițiilor și logica predicatelor. unde conceptul de model, realizabilitate, validitate, ș.a. sunt general valabile, în logica modală situația este cu totul alta. Aceste concepte. introduse prin definițiile 1-5, se particularizează pentru fiecare sistem modal în parte prin specificarea proprietăților formale ale relației R. Se ajunge astfel la concepte ca T-model, S4-model, T-structură de modele, T-validitate, S4-validitate, etc.

Definiția 6. Prin T-model (= model pentru sistemul T) se înțelege un model de forma V = <W, R, V> unde R este reflexivă. Dacă R este reflexivă și tranzitivă avem un S4-model, dacă este reflexivă simetrică și tranzitivă un S5-model.

În mod asemănător se definesc conceptele de T-structură de modele, B, S4, S5 - structuri de modele, T, S4, S5, B-validitate ș.a. De exemplu, o formulă a este T-validă dacă este validă pentru orice T-model din orice T-structură de modele. Teoremele de consistență și completitudine se formulează și ele în mod corespunzător: 1) Orice teoremă dedusă în T este T-validă, 2) Orice formulă T-validă este teoremă în T.

J. Hintikka va da o reformulare semanticii lui Kripke prin conceptele sale de „mulțime model" și sistem model". În esență problemele sunt aceleași, de aceea nu insist. Voi face în schimb câteva precizări în legătură cu alte două probleme de interes pentru logica modală care au ca punct de plecare ideile de lume posibilă și model.

6.1. STRUCTURI ȘI ALGEBRE MODALE

Fie $K = \{K, \cup, \cap, -, 1, 0, *\}$ o algebră booleeană în care 1 și 0 sunt elementul unitate respectiv elementul prim, iar „*" o operație topologică de deschidere definită prin axiomele:

1) $(x \cup y)^* = x^* \cup y^*$
2) $x^{**} = x^*$
3) $x \subset x^*$
4) $O^* = O$

Axiomele 1) - 4) pe care le-am reprodus după Hughes şi Creswell (36; 311) corespund definiției poloneze a spațiului topologic discutată în cap. III. Algebra $\{K, *\}$ este un spațiu topologic de deschidere, iar $\{K, \cup, \cap, -, 1, 0, *\}$ o algebră booleeană topologică. Ea poate constitui un domeniu de interpretare pentru sistemul modal T dacă:

1) Operația „*" satisface axiomele 1), 3), 4).
2) Funcția de valorizare V se definește în maniera cunoscută plus condiția: dacă $V(\alpha) = \alpha$ în K atunci $V(M\alpha) = a^*$.

Orice expresie a în T îşi asociază prin V un polinom booleean α_v în K astfel că dacă $\alpha_v = 1$ (în K) atunci α este teză (în T). Algebra K cu axiomele indicate se va numi T-*algebră*. Se poate demonstra în continuare că:

1) există o T-algebră care verifică numai tezele lui T, şi
2) orice teză în T este verificată într-o T-algebră.

Dacă operația „*" satisface şi axioma 2) atunci K este o S4-algebră, iar dacă satisface şi axioma

5) $\forall a \in K\ (a \neq 0 \rightarrow a^* = 1)$

atunci K este o S5-algebră.

Prin operația topologică de închidere se pot construi domeniile de interpretare pentru sistemele modale care îl au pe L (necesar) ca operator primitiv. Tarski, McKensey, Lemmon, Johnson sunt cei care au adus primele contribuții în definirea acestor formații algebrice pentru logica modală.

6. 2. RAPORTUL DINTRE MODALITATE ŞI POLIVALENȚĂ DIN PERSPECTIVA IDEII DE LUME POSIBILĂ

Întrebarea care se pune este dacă ideea de lume posibilă poate fi racordată ideii de polivalență şi dacă aceasta poate fi reprezentată aritmetic? Voi încerca să răspund acestei întrebări pornind de la cazul

particular în care mulțimea lumilor posibile se reduce la numai două elemente W = {w_1,w_2}. Relativ la W definim valoarea unei formule A în maniera cunoscută:

1) V(A, w_1) = 1, V(A, w_2) = 1,
2) V(A, w_1) = 1, V(A, w_2) = 0,
3) V(A, w_1) = 0, V(A, w_2) = 1,
4) V(A, w_1) = 0, V(A, w_2) = 0.

Pentru formula A s-au obținut sistemele de valori (11), (10), (01), (00), care înseamnă „adevărat în w_1 și în w_2", „adevărat în w_1 și fals în w_2", etc. Aplicând reguli de adevăr pentru operatorii propoziționali ca în procedeul lui Jaskowski descris într-un capitol anterior, obținem definițiile matriceale pentru un sistem tetravalent de logică modală. Negația și implicația vor arăta astfel:

A	~A
(11)	(00)
(10)	(01)
(01)	(10)
(00)	(11)

→	(11)	(10)	(01)	(00)
(11)	(11)	(10)	(01)	(00)
(10)	(11)	(11)	(01)	(01)
(01)	(11)	(10)	(11)	(10)
(00)	(11)	(11)	(11)	(11)

Dacă prin necesar înțelegem, ca și până acum „adevărat în toate lumile posibile" putem construi matricea:

A	LA
(11)	(11)
(10)	(00)
(01)	(00)
(00)	(00)

Aceste matrici sunt adecvate sistemului modal tetravalent construit de J. Lukasiewicz în studiul său *A System of modal logic* (49: 352). În sistemele modale de tip Lewis situația este cu totul alta pentru că aici mulțimea lumilor posibile este infinită ceea ce înseamnă că și mulțimea valorilor de adevăr trebuie să fie infinită. Ca să vedem mai exact cum stau lucrurile vom nota cu W* cardinalul mulțimii W și cu V* cardinalul mulțimii de valori logice V (prin „cardinalul" mulțimii se înțelege ca și până acum numărul de elemente al mulțimii).

Din examinarea inductivă a cazurilor ; rticulare W* = 1, W* = 2,... ajungem la următoarele corespondenţe î re cele două mulţimi şi numerele cardinale corespunzătoare lor.

W*	W	V*	V	
W* = 1	W = {w}	V* = 2	V = {	0}
W* = 2	W = {w_1, w_2}	V* = 4	V = {(	1), (10), (01),(00)}
W* = 3	W = {w_1, w_2, w_3}	V* = 8	V = {(	11), (110),..., (000)}
.....	.....	.....	.....	.....
W* = n	W = {w_1,..., w_n}	V* = 2^n	V = {(	1...1), (11...0),..., (00...0)}

Observăm mai întâi că numărul valori r de adevăr este funcţie de numărul lumilor posibile. În semantica stemelor modale de tip Lewis mulţimea W este infinită (W* = $\aleph_0$) ceea ce face ca şi mulţimea valorilor logice V să fie infinită nu ai că în timp ce W este infinit numărabilă, V este infinit continuă (V = $2^{\aleph_0}$). În cunoscuta sa monografie *Many-valued logics*, N.Rescher firmă că „nu există un sistem polivalent finit care să fie caracteristi pentru sistemele Lewis S1 - S5 din cauza faptului că sistemele olivalente finite conţin tautologii care nu sunt teoreme în S5 (şi ca atare nici în S1 - S4)". (63; 192). Rescher apreciază aici raportul dintre olivalenţă şi modalitate dintr-un punct de vedere sintactic însă el poa fi apreciat şi semantic. Conceptele de lume posibilă şi model scot î evidenţă de o manieră simplă şi convingătoare caracterul infinitist l sistemelor modale în cauză.

O serie de autori, începând cu Gödel, a reuşit să demonstreze echivalenţa dintre sistemele Lewis şi sisteme de logică intuiţionistă întrecerea de la polivalenţă şi invers. „Rez tatul lui Gödel - scrie Rescher în *Topics in philosophical logic* - abileşte faptul că dacă luăm sistemul S4 ca fiind sistemul care guvernează conceptele modale, atunci toate teoremele calculului opoziţional intuiţionist devin teoreme în S4 şi toate nonteoremele alculului propoziţional intuiţionist sunt nonteoreme în S4" (62; 20).

Caracterul infinitist al logicii moda moderne implică din păcate şi neajunsuri destul de mari. Dacă exi infinit de multe valori logice vor exista tot atâtea modalităţi de defi re a posibilului ca şi a celorlalţi operatori modali. Pericolul pluralis ului şi a relativismului

logic reapare, de data aceasta într-o formă mult mai elaborată. Să înțelegem că ideile modale trebuie relativizate la sistemele de axiome și definiții? Ce au în comun aceste idei și prin ce se deosebesc ele? Lipsa de unitate revine conceptelor modale ca atare sau numai mijloacelor noastre de abordare a lor? Iată câteva întrebări la care va trebui să răspundă cercetarea logică și filosofică actuală.

7. CONCLUZII

Este important să deosebim atunci când vorbim despre aplicațiile matematice în legătură cu conceptul de model între două aspecte pe care le considerăm esențiale: a) conținutul propriu-zis al modelului (care poate fi sau nu matematic), și b) forma matematică de utilizare a lui. Această delimitare dintre conținut și formă ne ajută să vedem de la început la ce nivel se plasează aplicațiile respective și în ce direcție evoluează ele.

O primă sursă de modele matematice pentru logică o constituie aritmetica. M-am rezumat la exemplificarea unor astfel de modele pentru silogistică având în vedere că și din punct de vedere istoric ele au apărut pentru prima dată aici. Între timp situația s-a generalizat astfel că la ora actuală putem vorbi de modele aritmetice în aproape toate disciplinele logicii.

Este curios că logica modală readuce în discuție distincția număr natural - număr cardinal, ca și categoriile numerice finit - infinit, numărabil - nenumărabil și altele. Ea se apropie în felul acesta de logica predicatelor unde am văzut că ideea de numărabilitate intervine în relația dintre valoarea expresiilor și tipul domeniilor. În termeni de modele aceasta este totuna cu a spune că dacă mulțimea de expresii are un model infinit atunci ea are un model numărabil. Analogia cu logica predicatelor nu ajunge însă până aici pentru că în logica modală nu există o teoremă similară cu teorema lui Lowenheim.

Algebrele modale în special acele formațiuni algebrice axate pe ideea de operație topologică aduc în discuție alte categorii de probleme. Relația dintre operațiile logice și operațiile topologice este după părerea mea insuficient explicată. Filosofia logicii încă nu a

reținut ca pe un fapt demn de luat în considerare aplicațiile de ordin topologic în domeniul logicii modale.

Nu vreau să închei aceste considerații înainte de a trece în revistă și o altă categorie de probleme care se referă de data aceasta nu la caracterul interpretării, ci la faptul că sistemele formale pot avea mai multe interpretări. După cum este cunoscut, un sistem formal este construit în legătură cu o anume teorie și această teorie reprezintă de fapt primul domeniu de interpretare al sistemului respectiv. O dată însă sistemul construit apare posibilitatea interpretării lui și în alte domenii care nu au nimic în comun cu teoria lui de origine. Aceste interpretări generează modele care sunt, sau pot fi, izomorfe între ele. Am văzut că în logica predicatelor izomorfismul domeniilor a permis demonstrarea unei importante teoreme cu privire la completitudinea sistemelor. În plan general însă, izomorfismul domeniilor are și o altă semnificație.

Fie S un sistem formal și A, B, C,... modelele sale. Dacă A, B, C,... sunt izomorfe între ele atunci se poate spune că sistemul S descrie ceea ce au ele în comun, deci ceva foarte general. Acest „ceva foarte general" este structura. Desigur că și structura poate fi descrisă în limbaj și atunci ea devine un fel de model privilegiat al sistemului. Există totuși o deosebire esențială între structură și model. Structura este unică în timp ce modelele caracterizate prin structura respectivă pot fi mai multe. Apoi structura este ceva abstract (este chiar un tip superior de abstracție) pe când modelele sunt concrete, ele aparțin unui domeniu determinat. Nu o dată se întâmplă ca aceste structuri să corespundă unor binecunoscute structuri matematice. Ceea ce am numit în acest capitol T-algebră, S4 și S5-algebre nu sunt altceva decât „varietăți topologice" ce caracterizează sistemele modale T, S4, S5. În general, structura se interpune *între* sistemul formal și model fapt ce explică de ce în semantica modernă pot fi întâlnite aproape toate conceptele de bază ale matematicii structurale.

CAP. VI

APLICAȚII MATEMATICE CU CARACTER SPECIAL

Unele dintre metodele matematice în logică au un caracter întrucâtva diferit decât cele discutate până acum fie în sensul că ele se aplică la probleme particulare ale logicii, fie că se aplică la probleme ce țin în egală măsură şi de logică şi de matematică. Lista lor rămâne deschisă. Pe de altă parte, nu este exclus ca aceste metode să fie generalizate în continuare, să se dovedească aplicabile şi la alte probleme decât cele la care se aplică ele astăzi.

1. APLICAȚII ALE RAȚIONAMENTULUI DIAGONAL

Această metodă a fost dată de Cantor în legătură cu demonstrația caracterului nenumărabil al mulțimii numerelor reale. Ulterior metoda lui s-a dovedit a fi o metodă generală pentru acest tip de demonstrație în matematică. În esență, raționamentul lui Cantor constă în a construi un tabel (o enumerare) care să indice existența unei entități ce nu poate fi pusă în corespondență cu nici un element al unei mulțimi numărabile. Prin „mulțime numărabilă" înțelegem o mulțime infinită ce poate fi pusă în corespondență biunivocă cu mulțimea numerelor naturale. În continuare voi da două exemple de astfel de mulțimi ilustrate prin tabelele (1) şi (2).

(1)
$0, x_{00}\ x_{01}\ x_{02}$ ...
$0, x_{10}\ x_{11}\ x_{12}$ ...
$0, x_{20}\ x_{21}\ x_{22}$ ...
.....

(2)
$f_0(0), f_0(1), f_0(2)$, ...
$f_1(0), f_1(1), f_1(2)$, ...
$f_2(0), f_2(1), f_2(2)$, ...
.....

Exemplul (1). Numerele reale din intervalul [0,1] sunt date în forma unor fracții zecimale infinite. Dacă dezvoltarea zecimală a unei fracții este totuşi finită, ultimul ei termen se poate scrie ca o succesiune infinită a cifrei 9. De exemplu, în locul lui 0,236 se va scrie

0,235999... Tabelul (1) care redă fracțiile zecimale de acest tip poate fi pus în corespondență biunivocă cu mulțimea numerelor naturale. Totuși, pe diagonală se formează fracția zecimală $0, x_{11} x_{22} x_{33} \ldots$ care nu poate avea un corespondent în mulțimea numerelor reale. Prin urmare, mulțimea numerelor reale nu este numărabilă.

Exemplul (2). În tabelul funcțiilor aritmetice de un argument apare pe diagonală funcția $f_x(x)$. Definim acum o funcție f(x) în felul următor: $f(x) = f_x(x) + 1$. Să considerăm că în enumerarea noastră funcți : f(x) are indicele k, deci $f_k(x) = f_x(x) + 1$. Întrucât k și x au fost al se la întâmplare putem studia cazul particular k = x, adică: $f_x(x) = f_x(x + 1$, care contravine principiului identității. Așadar nici mulțimea funcțiilor aritmetice de un argument nu este numărabilă.

Aplicații logice. Raționamentul diagonal are și unele aplicații logice foarte interesante. Una dintre ele se referă la expunerea făcută de Mostowski paradoxului lui Richard.

Să presupunem că dispunem de toate expresiile unui limbaj L care definesc proprietăți ale numerelor. Notăm aceste proprietăți după modelul lui Gh. Enescu (20; 78) cu Rich (0), Rich (1), Rich (2),...; Dacă un număr oarecare n nu are proprietatea „$Rich_i$" vom scrie „non - $Rich_i$ (n)".Construim acum un tabel asemănător celor exemplificate mai sus:

$Rich_0$ (0), $Rich_0$ (1), $Rich_0$ (2),...
$Rich_1$ (0), $Rich_1$ (1), $Rich_1$ (2),...
$Rich_2$ (0), $Rich_2$ (1), $Rich_2$ (2),...
.....

Pe diagonală se formează expresie $Rich_n$ (n). Întrebarea este dacă putem găsi un număr k astfel că non - $Rich_k$ (k) ? Dacă da, atunci „ non - $Rich_k$ (k)" este tot o proprietate richardiană și va trebui să aibe și ea un indice, să zicem i. Se obține astfel identitatea:

$Rich_i$ (k) = non - $Rich_k$ (k)

care pentru cazul particular i = k conduce la contradicția

$Rich_k$ (k) = non - $Rich_k$ (k).

Paradoxul lui Richard poate fi corelat din perspectiva raționamentului diagonal cu conceptul de *adevăr* (la Tarski) și cu conceptul de *demonstrabil* (la Gödel).

Aplicațiile în legătură cu conceptul *demonstrabil* au fost inițiate de Fisler și au avut ca scop construirea de propoziții indecidabile (Finsler l-a precedat pe Gödel utilizând o formă a paradoxului lui Richard însă în loc să folosească ca Richard noțiunea de *definiție*, el folosește, cum va face mai târziu Gödel, noțiunea de *derivare*).

Se introduce mai întâi definiția:

non - $Rich_k$ =„$Rich_k$ (n) nu este demonstrabilă"

ceea ce în simbolismul lui Gödel s-ar traduce prin $n \notin Rich_k = \overline{Bew}\,[Rich_k\,(n)]$.

Printr-un raționament asemănător se obține contradicția:

$Bew\,[Rich_k\,(n)] = \overline{Bew}\,[Rich_k\,(n)]$.

Două probleme se ridică în legătură cu raționamentul lui Cantor. Prima este filosofică însă ea are importante consecințe matematice. A doua este matematică cu implicații de data aceasta pentru filosofie.

În legătură cu prima problemă trebuie spus că adversarii teoriei mulțimilor au ridicat obiecții relativ la faptul că metoda lui Cantor *indică* fără a *construi*. Cu alte cuvinte este doar indicat că există un număr ce nu poate fi pus în relație de corespondență cu un element al unei mulțimi numărabile însă efectiv acest număr nu este (și nici nu poate fi) construit. Din punctul de vedere al matematicii intuiționiste raționamentul păcătuiește sub două aspecte - al constructivității și al legitimității unor scheme și legi logice (contrapoziția implicației. raționamentul prin reducere la absurd, ș.a.). Aceste aspecte care țin. cum se observă, de logică și filosofie, au condus la o matematică ce diferă în multe privințe de matematica mulțimistă.

A doua problemă, despre care am spus că este de natură matematică, se referă la *problema continuului*. Demonstrând nenumărabilitatea anumitor mulțimi, procedeul diagonal pune în evidență numere ce nu mai corespund unor mulțimi finite numite de aceea și „numere transfinite". Să notăm cu $\aleph_0$ cardinalul unei mulțimi numărabile și cu $\aleph_1$ cardinalul (puterea) unei mulțimi continue. respectiv a mulțimii numerelor reale. Relativ la succesiunea $\aleph_0$, $\aleph_1$... se pot face două supoziții:

1)$2^{\aleph_0} = \aleph_1$ (ipoteza restrânsă a continuului)

2)$2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$ (ipoteza generalizată a continuului)

Conform rezultatelor lui Gödel şi Cohen atât prima cât şi a doua ipoteză sunt consistente cu axiomele teoriei mulţimilor. Chiar dacă cele două propoziţii nu se pot demonstra , ele sunt justificate logic prin faptul că nu conduc la contradicţii. Este de departe vizibil că aceste rezultate au consecinţe filosofice extrem de interesante mai ales că distincţia continuu-discret ca şi actual-potenţial relativ la conceptul de infinit au fost cunoscute filosofilor încă din antichitate.

Reţinem în concluzie că raţionamentul diagonal nu are aceeaşi destinaţie în logică cu destinaţia lui din matematică. El nu este folosit în logică pentru demonstrarea caracterului nenumărabil al anumitor mulţimi şi cu atât mai puţin pentru introducerea unor noi tipuri de numere. Desigur, nu trebuie exclusă posibilitatea ca logica să-i găsească şi alte utilizări.

2. METODA INDUCŢIEI MATEMATICE

Întrucât termenul „inducţie" este un termen ambiguu va trebui să distingem între principalele lui sensuri şi anume, inducţia logică (cu cele două specii ale ei) şi inducţia matematică. Deşi înrudite, aplicaţiile lor sunt diferite iar problemele pe care le rezolvă sunt şi ele destul de diferite. În general, prin „inducţie matematică" se înţelege un ansamblu de reguli şi procedee de definire şi demonstrare ce constau în aplicarea principiului inducţiei matematice. Acest principiu a fost încetăţenit o dată cu axiomele lui Peano şi se referă la numere. El poate fi formulat intensional (prin proprietăţi) sau extensional (prin clase):

$P(0) \bullet (P(n) \rightarrow P(n+1)) \rightarrow \forall n\, P(n)$

adică: dacă 0 are proprietatea P şi dacă din faptul că n are proprietatea P rezultă că şi succesorul lui n are proprietatea P, atunci orice număr n are proprietatea P. Presupunând acum că P este intensiunea clasei M, adică $M = \lambda x\, P(x)$, principiul poate fi dat extensional:

$0 \in M \bullet (n \in M \rightarrow n+1 \in M) \rightarrow \forall n\, (n \in M)$.

Pe lângă cele două formulări, care sunt de bază, există o serie de formulări înrudite. De exemplu, dacă M este o submulţime nestrictă

a mulțimii numerelor naturale N astfel că pentru orice n, M conține pe n numai dacă ea conține pe toți predecesorii lui n, atunci M = N. La acestea se adaugă și forme mai speciale cum este inducția transfinită (relativ la numerele ordinale), inducția structurală (relativ la construcțiile formale) și inducția inversă (relativ la anumite tipuri de demonstrație).

1. *Demonstrația prin inducție*

Fie P o proprietate a numerelor naturale. O demonstrație prin inducție este o demonstrație de forma:

1) 0 are proprietatea P

2) Pentru orice n, dacă n are proprietatea P atunci n+1 va avea proprietatea P.

3) Orice număr natural are proprietatea P.

Conform unei terminologii introduse de S.C.Kleene, premisa 1 se numește *baza inducției*, 2) este *pasul inductiv*, P(n) este *propoziție inductivă* iar n este variabila după care se face inducția. Spre deosebire de inducția logică , în speță inducția incompletă, în inducția matematică concluzia este certă. Această certitudine poate fi apreciată din două puncte de vedere: 1) al modului în care sunt obținute obiectele, și 2) al formei demonstrației. În ce privește primul aspect trebuie spus că obiectele sunt introduse tot pe cale inductivă, iar propoziția 3) face parte dintr-un principiu de construcție. Ea nu poate fi decât adevărată (în supoziția că și celelalte sunt adevărate). Al doilea aspect ridică probleme mai speciale. În demonstrația prin inducție matematică intervin atât scheme deductive cât și scheme inductive, ea are certitudinea deducției și productivitatea inducției. Poincaré explică progresul în matematică prin raționamentele inductive și recursive pentru că dacă aceste raționamente ar fi pur deductive propozițiile matematice nu ar fi decât forme foarte sofisticate de-a spune că „A este identic cu A".

Fie 1, 2, 3, ... valorile variabilei n. Pentru aceste valori propozițiile 1) și 2) conduc la schemele *modus ponens*:

$$\frac{P(0) \qquad P(0) \rightarrow P(1)}{P(1)} \qquad \frac{P(1) \qquad P(1) \rightarrow P(2)}{P(2)} \qquad \frac{P(2) \qquad P(2) \rightarrow P(3)}{P(3)}$$

Întrucât pentru orice n se poate construi o asemenea schemă inferențială putem proceda mai departe inductiv:

$$\frac{P(1), P(2),..., P(n),}{\forall n\, P(n)}$$

Ca o ilustrare a demonstrației prin inducție matematică voi reformula după Kleene (40; 22) demonstrația următoarei teoreme: Dacă $M^* = n$ și $M \sim M_1 \subset M$, atunci $M_1 = M$. Prin această teoremă se demonstrează că o mulțime finită nu poate fi echivalentă cu o submulțime proprie a sa. Propoziția inductivă P(n) se formează în felul următor: pentru oricare două mulțimi M, M_1 dacă $M^* = n$, $M \sim M_1$ și $M_1 \subset M$ atunci $M_1 = M$.

Baza inducției: $n = 0$ și $M^* = 0$. Urmează că $M = \varnothing$ și dacă $M_1 \subset \varnothing$ atunci $M_1 \subset \varnothing$ și $M_1 = M$.

Pasul inductiv. Presupunem că are loc propoziția inductivă (= ipoteza inducției pentru $x = n$). Dacă $M^* = n+1$ atunci $M = N \cup \{a\}$ unde $N^* = n$ și $a \notin N$. De asemenea, are loc $N \cup \{a\} \sim M_1$ și $M_1 \subset N \cup \{a\}$. Va trebui să demonstrăm că $M_1 = N \cup \{a\}$.

În corespondența biunivocă $N \cup \{a\} \sim M_1$ considerăm că elementului a îi corespunde elementul $b \in M_1$. Atunci $N \sim M_1 - \{b\}$ și $M_1 - \{b\} \subset (N \cup \{a\}) - \{b\}$. Dar $(N \cup \{a\}) - \{b\} \sim N$ ceea ce înseamnă că $[(N \cup \{a\}) - \{b\}]^* = n$, $M_1 - \{b\} \sim (N \cup \{a\}) - \{b\}$ și $M_1 - \{b\} \subset (N \cup \{a\}) - \{b\}$. Conform ipotezei inducției $M_1 - \{b\} = (N \cup \{a\}) - \{b\}$ de unde rezultă că $M_1 = N \cup \{a\}$.

Inducția matematică poate fi aplicată în logică după cum inducția logică poate fi aplicată în matematică. Un interesant exemplu de aplicație logică este demonstrația dată de Kleene teoremei deducției[1]

2) *Definiții realizate cu ajutorul inducției*

În cartea la care m-am referit, Kleene distinge între definițiile inductive și definițiile prin inducție (sau recursive). Exemplul clasic de definire inductivă este definiția numerelor naturale:

---

[1] Prezentarea detaliată a acestei demonstrații poate fi găsită în cartea lui Gh. Enescu *Teoria sistemelor logice* (vezi pag. 82 și urm.).

1) 0 este numărul natural,
2) Dacă n este număr natural atunci n` (succesorul lui n) este număr natural.
3) Singurele numere naturale sunt cele copnstruite prin 1) şi 2).

Într-un mod asemănător se pot defini conceptele de termen. formulă, ş.a. Voi reproduce pentru exemplificare doar definiţia termenilor, alte exemple de definiţii inductive, cititorul poate găsi în primul capitol.

1) 0 este termen,
2) Orice variabilă este termen,
3) Dacă x şi y sunt termeni atunci x`, x+y, xy sunt termeni.
4) Sunt termeni doar expresiile construite prin regulile 1) - 3).

Kleene împarte definiţiile inductive în fundamentale şi nefundamentale. În general, o definiţie inductivă este fundamentală dacă în baza ei se poate construi un domeniu de entităţi (acelaşi cu domeniul variabilelor). O definiţie este nefundamentală dacă ea defineşte doar predicate relative la aceste domenii de entităţi. În alt plan, distincţia fundamental - nefundamental corespunde distincţiei dintre obiect şi expresie. În logică nu avem de-a face cu definiţii inductive fundamentale pentru că domeniul celor două valori logice {v, f} nu este construit inductiv. Avem aici un alt aspect al distincţiei dintre logică şi matematică, distincţie ce vizează domeniul de obiecte la care se raportează celelalte două ştiinţe.

Dacă în logică nu întâlnim definiţii inductive fundamentale în schimb sunt frecvent întâlnite definiţile nefundamentale. Indiferent că este vorba de logică sau matematică, definiţiile nefundamentale sunt generalizări ale definiţiilor fundamentale. Aceste generalizări constau în faptul că proprietatea iniţială nu se mai aplică unui singur obiect, ci unei clase de obiecte. Apoi operaţia succesor dispare locul ei fiind reluat de o altă operaţie care poate fi o operaţie de construcţie şi chiar de derivare (vezi definiţia conceptului de formulă). Kleene consideră definiţiile inductive nefundamentale ca fiind definiţii ale unor predicate ce pot fi asociate ideilor de adevăr sau fals. Valoarea predicatului considerat se determină prin raportare la clauzele ce compun definiţia inductivă. După cum arată Kleene, aceste clauze pot fi directe sau extreme. Clauze directe numesc obiectele pentru care

predicatul ia valoarea v iar clauza extremă arată că aceste obiecte sunt singurele caracterizate astfel (pentru orice alt obiect predicatul ia valoarea f). La rândul lor, clauzele indirecte se împart în clauze de bază, prin care se indică obiectele inițiale ce satisfac predicatul, și clauzele inductive care asociază valoarea v doar obiectelor ce stau într-o anume relație cu obiectele inițiale. Prin aceste clauze, valoarea predicatului este determinată într-un mod univoc.

3. METODA FUNCȚIILOR RECURSIVE

Definițiile prin inducție (sau recursive) se aplică funcțiilor și predicatelor ce pot fi reprezentate ca funcții. Ca și definițiile inductive aceste definiții constau în trei pași: 1) se dă valoarea funcției, respectiv predicatului, pentru valoarea inițială a argumentului, 2) pentru orice argument x, se dă valoarea funcției pentru valoarea imediat următoare a argumentului, 3) prin 1) și 2) se consideră că valoarea funcției este definită în general.

O funcție definită prin 1) - 3) este funcție recursivă sau funcție definită recursiv. Spre deosebire de definițiile inductive care merg de la simplu la complex, în definițiile recursive drumul este oarecum invers. Valoarea funcției este determinată regresiv, prin revenire de la complex la simplu, cu condiția ca argumentul funcției să fie construit inductiv. Ecuațiile de mai jos

$$\begin{cases} \varphi(0) = q \\ \varphi(x') = \chi(x, \varphi(x)) \end{cases}$$

exprimă definiția funcției $\varphi(x)$ prin inducție după variabila x când q este un număr dat iar χ (x, y) este o funcție de două argumente de asemenea dată. Pentru exemplificare să calculăm pe φ (4). Conform celor două ecuații de mai sus obținem următoarele valori pentru argumentul funcției construit inductiv:

$\varphi(0) = q$

$\varphi(1) = \chi(0, \varphi(0)) = \chi(0,q)$,

$\varphi(2) = \chi(1, \varphi(1)) = \chi(1, \chi(1, \varphi(0)) = \chi(1, \chi(0, q))$,

$\varphi(3) = \chi\ (2, \varphi(2)) = \chi\ (2, X(1, \varphi(1)) = \chi\ (2, \chi\ (1, \chi\ (0, q))),$
$\varphi(4) = \chi\ (3, \varphi(3)) = \chi\ (3, X(2, \varphi(2)) = \chi\ (3, \chi\ (2, \chi\ (1, \chi\ (0, q)))),$

Întrucât dispunem de un procedeu prin care pentru orice număr x, putem calcula valoarea $\varphi(x)$, funcția φ este univoc determinată. De altfel, conform unui rezultat obținut de A. Church cunoscut sub numele de *teza lui Church*, funcțiile recursive sunt funcții calculabile.

În alte definiții recursive, funcția φ depinde de variabilele adiționale numite și „paramertii". Sistemele de ecuații

$$\begin{cases} x + 0 = x \\ \\ x + y` = (x + y)` \end{cases} \qquad \begin{cases} x\ 0 = 0 \\ \\ x\ y` = (x\ y) + x \end{cases}$$

definesc funcțiile $x + y$, $x \bullet y$ prin inducție după y avându-l pe x ca parametru. În logică, funcțiile de adevăr sunt funcții definite recursiv:
$Nx = 1 - x,$
$Kxy = \min(x, y),$
$Axy = \max(x, y),$
$Cxy = \max(1 - x, y),$ etc.

Indiferent că este vorba de matematică sau logică definițiile recursive presupun o serie de scheme de operații și definiții pe care le vom numi după Gh. Enescu „scheme de recursie". În varianta dată de Kleene (40; 219) aceste scheme arată astfel:

(1) $\varphi(x) = x`,$
(2) $\varphi(x_1, ..., x_n) = q$
(3) $\varphi(x_1, ..., x_n) = x_i,$
(4) $\varphi(x_1, ..., x_n) = \varphi\ (\chi_1(x_1, ..., x_n), ..., \chi_m\ (x_1, ..., x_n)),$

$$(5a)\begin{cases} \varphi(0) = q \\ \\ \varphi(y') = \chi(y, \varphi(y)) \end{cases}$$

$$(5b)\begin{cases} \varphi(0, x_2, ..., x_n) = \psi(x_2, ..., x_n) \\ \\ \varphi(y', x_2, ..., x_n) = \chi(y, \varphi(y, x_2, ..., x_n), x_2, ..., x_n) \end{cases}$$

O funcție definită prin aplicarea schemelor (1) - (5) se numește funcție *primitiv recursivă*. La rândul lor predicatele ce pot fi asociate

funcţiilor recursive sunt predicate (concepte) recursive. Prin procedeul aritmetizării Gödel a arătat că principalele predicate metateoretice pot fi definite recursiv cu excepţia predicatului „x este formă demonstrabilă" care nu este recursiv.

4. METODA DIAGRAMELOR ŞI A REPREZENTĂRILOR GRAFICE

La fel ca în matematică, în logică pot fi întâlnite o serie de diagrame, scheme şi reprezentări grafice care ajută la formularea anumitor probleme şi care de multe ori se dovedesc a fi chiar suficiente pentru rezolvarea lor. Cele mai cunoscute sunt diagramele Euler din silogistică utilizate pentru testarea validităţii modurilor silogistice şi a inferenţelor imediate. Cum se ştie, ele reprezintă raporturile dintre termenii judecăţilor silogistice, mai precis, raporturile dintre extensiunile acestor termeni. Logicianul român Fl. Ţuţugan a demonstrat că aceste diagrame au totuşi un caracter limitat, că anumite legi silogistice, cum ar fi legea potrivit căreia din premisele negative nu se poate obţine nici o concluzie, sunt prejudecăţi datorate tocmai acestui gen de diagrame. „Reprezentarea prin cercuri - notează Fl. Ţuţugan - presupun o completare, o analiză logică a poziţiilor posibile a cercurilor în cadrul diferitelor judecăţi în aşa fel încât să fim siguri că nu am omis nici o posibilitate. Această analiză logică este cea care dă în fond vigoare şi generalitate demonstraţiei. Simpla reprezentare prin cercuri, neînsoţită de o analiză care să dovedească exhaustivitatea cazurilor, nu este suficientă." (72; 318). Trebuie spus că logicianul român este cel care a dat o interesantă dezvoltare silogisticii prin includerea termenilor negativi pe care i-a reprezentat printr-un alt gen de diagrame.

Pornind de la diagramele Euler, J.Venn a introdus o nouă categorie de diagrame, aşa numitele „diagrame Venn". Sunt reprezentate aici toate intersecţiile posibile ale claselor ce reprezintă extensiunile termenilor în cadrul propoziţiilor de predicaţie. Prin analogie, au fost introduse apoi alte diagrame cum ar fi diagramele

Veitch, Karnaugh, ş.a., folosite în rezolvarea altor probleme, nu doar celor din silogistică.

În afară de diagrame există la ora actuală o serie de alte reprezentări şi scheme grafice care pot fi găsite practic în toate disciplinele logicii. Ele diferă de la autor la autor, fiind folosite mai mult în scopuri particulare ale logicii de aceea nu insist asupra lor.

BIBLIOGRAFIE

1. Ackermann, W., *Solvable Cases of Decision Problem*, North - Holland Publishing Company, Amsterdam, 1968.
2. Albu, A., *Introducere în fundamentele matematicii*, partea I şi II, A, B, Univ. de Vest din Timişoara, 1995.
3. Berkeley, E. C., *Symbolic Logic And Intelligent Machines* (trad. rusă, Moskova, 1961).
4. Bieltz, P., *Logici polivalente*, în vol. *Direcţii în logica contemporană*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1974.
5. Bochenski, I.M. *On the Categorial Syllogism*, în A. Menne (ed) *Logico-Philosophical Studies*, Dordrecht - Holland, Amsterdam, 1962.
6. Boole, G., *An Investigation of The Laws Of Thought*, Dover Publications, Inc.
7. Botezatu, P. *Constituirea logicităţii*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1966.
8. Bourbaki, N., *Arhitectura matematicii*, În vol. *Logică şi Filosofie*, Editura Politică, Bucureşti, 1966.
9. Bourbaki, N., *Theorie des ensembles*, Herman, Paris, 1970.
10. Carnap, R., *Logical Foundations of Probabilities*, The University of Chicago Press, 1960.
11. Carnap, R., *Semnificaţie şi necesitate*, Editura Dacia, Cluj, 1972.
12. Church, A., *The Calculi of Lambda - Conversion*, în „Ann. Of Matematical Studies", 6, Princeton, 1941 (reed. 1951).
13. Church, A., *Introduction To Mathematical Logic*, Princeton University Press, 1956.
14. Church, A., *Matematica şi logica*, în *Logică şi Filosofie*, Editura Politică, Bucureşti, 1966.
15. Corcoran, J., Wood, S., *Boole's Criterion For Validity and Invalidity*, în „Notre - Dame Journal Of Formal Logic", vol. 21, Nr. 4 / 1980.
16. Curry, H. B., Feys, R., *Combinatory Logic I*, North - Holland Publishing Company, Amsterdam, 1958.
17. Daigneault, A., *Theorie des modeles en logique mathematique*, Les Presses de L'Universite de Montreal, 1967.
18. Enescu, Gh., *Logică şi Adevăr*, Editura Politică, Bucureşti, 1967.
19. Enescu, Gh., *Logica Simbolică*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1971.
20. Enescu, Gh., *Teoria sistemelor logice*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1976.
21. Enescu, Gh., *Fundamentele logice ale gândirii*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1980.
22. Enescu, Gh., *Dicţionar de logică*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985.
23. Faiblemen, J. K., *Assumption of Whitehead's And Russell's Princ. Mathematica*, în „International Logic Review", Nr. 8 / 1973.

69. Tarski, A., *Logique, Semantique, Metamatematique*, vol. I, Libraire Armand Colin, Paris, 1972.
70. Tâmoveanu, M., *Elemente de logică matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1964.
71. Trakhtenbrot, B., *Algoritmes et resolution de problemes par des machines*, în vol. *Nouvelle orientationes des mathematiques*, Moskova, 1975.
72. Ţuţugan, Fl., *Cu privire la valabilitatea unor moduri silogistice, altele decât cele ale logicii clasice*, în vol. *Probleme de logică*, Editura Academiei, Buc. 1956.
73. Vieru, S., *Axiomatizări şi modele ale modelelor silogistice*, Editura Academiei, Buc. 1975.
74. Vieru, S., *Semantica lumilor posibile şi logica modală*, în vol. *Direcţii în logica contemporană*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1974.
75. Wang, Hao., *Studii de logică matematică*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1972.
76. Witehead, A. N., Russell, B., *Principia Matematica*, Cambridge University Press, 1964.
77. * * * *Logică şi Filosofie*, (studii), Editura Politică, Bucureşti, 1966.
78.* * * *Mica enciclopedie matematică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1984.

CUPRINS

PREFAȚĂ 3
INTRODUCERE 5
I. LOGICA ŞI LIMBAJELE SIMBOLICE 13
1. Constituirea simbolismului logic 13
2. Tipuri de limbaje simbolice în logică 22
3. Limbajul aritmetic în logică 27
3.1. Limbajul aritmetic la Leibniz 37
3.2. Limbajul aritmetic în logica propozițiilor . . . 29
3.3. Limbajul aritmetic şi sistemele de numer ie . . 31
3.4. Aritmetica gödeliană 33
4. Limbajul formalizat în logică şi matematică 36
5. Concluzii 39
II. CÂTEVA CONCEPTE FUNDAMENTALE ÎN LOGICĂ 41
1. Conceptul de mulțime. 42
2. Funcția - de la matematică la logică 49
3. Logica modernă şi conceptul matematic de număr 59
4. Este structura (formală) specifică matematicii? 68
5. Concluzii 79
III. AXIOMATICA ÎN LOGICĂ ŞI MATEMATICĂ 82
1. Valori logice şi predicate metateoretice 83
2. Sisteme axiomatice în logica propozițiilor şi logica predicatelor 89
3. Sistemul axiomatic şi conceptul de consecință lo ic . . . 94
4. Sistemul axiomatic şi conceptul de sistem dedu iv . . . 97
5. Sistemul axiomatic şi conceptul de teorie forma za i . . 98
6. Concluzii 106
IV. ALGORITMII ŞI LOGICA 109
1. Conceptul de problemă în logică şi matematică . . . 109
2. Conceptul de algoritm. Aspecte generale 113
3. Algoritmii în logică 116
4. Algoritmul şi problema deciziei 118
5. Problema deciziei în logica propozițiilor 120
6. Problema deciziei în logica predicatelor 124
7. Concluzii 128

V. LOGICA ŞI CONCEPTUL SEMANTIC DE MODEL
1. Interpretare şi model . . . . . .
2. Modele aritmetice în logică . . . . . .
3. Alte modele . . . . . .
4. Conceptul de model în logica propoziţiilor . . . . . .
5. Conceptul de model în logica predicatelor . . . . . .
6. Conceptul de model în logica modală . . . . . .
6.1. Structuri şi algebre modale . . . . . .
6.2. Raportul dintre modalitate şi polivalenţă din perspectiva conceptului de lume posibilă . . .
7. Concluzii . . . . . .
VI. APLICAŢII MATEMATICECU CARACTER SPECIAL . .
1. Aplicaţii ale raţionamentului diagonal . . . . . .
2. Metoda inducţiei matematice . . . . . .
3. Metoda funcţiilor recursive . . . . . .
4. Metoda diagramelor şi a reprezentărilor grafice . . . . .
BIBLIOGRAFIE . . . . . .